BÖLÜM I

VEKTÖREL ANALİZ

1.1.GİRİŞ

Elektromanyetikteki **bazı nicelikler (yük, akım, enerji gibi) skaler**, **bazıları da (elektrik ve manyetik alan şiddetleri gibi) vektörel** büyüklüklerdir. Hem skalerler, hem de vektörler zamanın ve konumun fonksiyonu olabilirler. Belirli bir zaman ve konumda, bir skaler (pozitif veya negatif, birimiyle birlikte) büyüklüğüyle tam olarak tanımlanır. Böylece, örneğin, t=0 anında belli bir konumdaki, (-1) μC'luk bir yükü belirleyebiliriz. Diğer taraftan, belirli bir zaman ve konumda, **bir vektör hem büyüklük hem de yön bilgisi gerektirir**. **Bir vektörün yönünü belirtebilmek için, üç boyutlu uzayda üç sayıya gerek vardır ve bu sayılar, bir koordinat sisteminin seçimine bağlıdır**. Bir koordinat sisteminde verilen bir vektörün başka bir koordinat sistemine dönüştürülmesi, bu sayıları değiştirir. Bununla beraber, çeşitli skaler ve vektörel niceliklerle ilgili kanunlar ve teoremler, koordinat sistemine

bakılmaksızın, kesinlikle geçerli kalmalıdır. Bu yüzden, elektromanyetizmaya ait kanunların genel ifadeleri bir koordinat sisteminin belirlenmesini gerekli kılmaz. Özel bir koordinat sistemi, sadece, geometrisi verilen bir problem analiz edileceği zaman seçilir. Örneğin, akım taşıyan bir iletken halkanın merkezindeki manyetik alan hesaplanacaksa, halka dikdörtgen olduğunda dik koordinatları, halka dairesel biçimli ise, kutupsal koordinatları (iki boyutlu) kullanmak daha uygun olacaktır. Böyle bir problemin çözümünü yönlendiren temel elektromanyetik bağıntı, her iki geometri için de aynıdır.

Bu bölümde, vektörel analiz ile ilgili üç ana konu üzerinde durulacaktır:

1. Vektör cebri: Vektörlerin toplanması, çıkarılması ve çarpılması.
2. Ortogonal koordinat sistemleri: Kartezyen, silindirik ve küresel koordinatlar.
3. Vektörel hesap: Vektörlerin diferansiyellerinin ve integrallerinin hesaplanması; çizgisel, yüzey ve hacim integralleri; “del” operatörü; gradyent, diverjans ve rotasyonel işlemleri.

Üç boyutlu uzayda, bir vektörel bağıntı, gerçekte, üç skaler bağıntı demektir. Elektromanyetikte, vektörel analiz tekniklerinin kullanımı, kısa ve öz formülasyon sağlar.

Pratik problemlerin çözümünde, daima, geometrik şekilleri belli olan bölgeler veya cisimlerle ilgilenilir ve genel formülleri, verilen geometriye uygun bir koordinat sisteminde ifade etmek gerekir. Örneğin, bir dairesel silindiri veya bir küreyi içeren problemler için, bilinen (x,y,z) dik koordinatlarını kullanmak uygun düşmez. Çünkü bir dairesel silindirin veya bir kürenin sınırları (x,y,z)'nin sabit değerleri ile tanımlanamaz. Bu bölümde, çok yaygın olarak kullanılan üç ortagonal (dik) koordinat sistemini, vektörlerin bu koordinat sisteminde gösterilmesini ve işlem yapılmasını inceleyeceğiz. **Bu koordinat sistemlerini iyi bir şekilde tanımak, elektromanyetik problemlerin çözümünde esastır.**

Vektörel hesap, vektörlerin türev ve integrallerinin hesaplanması ile ilgilidir. Belirli diferansiyel işlemciler tanımlanarak, koordinat sisteminin seçimiyle değişmeyecek

şekilde, elektromanyetizmanın temel kanunları kısaca ifade edilebilir. Bu bölümde, vektörleri içeren çeşitli tipteki integrallerin hesaplama teknikleri tanıtılacak ve çeşitli tipteki diferansiyel operatörler tanımlanacaktır.

1.2. VEKTÖRLERİN TOPLANMASI VE ÇIKARILMASI

Bir vektörün bir büyüklük ve bir yöne sahip olduğunu biliyoruz. Bir vektör,

$$\vec{A} = \hat{a}A \tag{1.1}$$

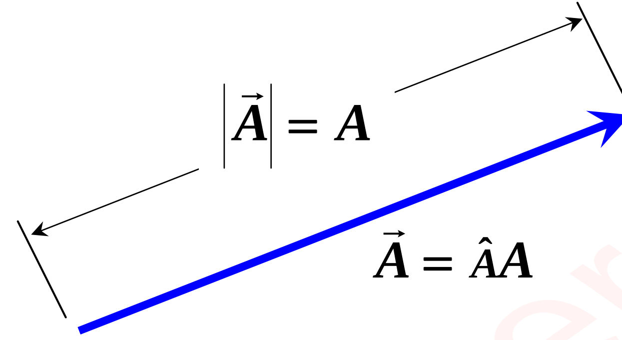
şeklinde yazılabilir. Burada A, $\vec{A}$'nın büyüklüğüdür (birim ve boyutu vardır) ve $\hat{a}$, $\vec{A}$'nın yönünde ve birim büyüklüğe sahip boyutsuz birim vektörüdür. Böylece,

$$A = \left|\vec{A}\right| \tag{1.2}$$

ve

$$\hat{a} = \frac{\vec{A}}{\left|\vec{A}\right|} = \frac{\vec{A}}{A} \tag{1.3}$$

yazılabilir. Bir $\vec{A}$ vektörü, Şekil.1.1'de gösterildiği gibi, ok ucu $\hat{a}$ yönünü gösteren ve uzunluğu $|\vec{A}| = A$ olan yönlü bir doğru parçasıyla grafiksel olarak temsil edilebilir.

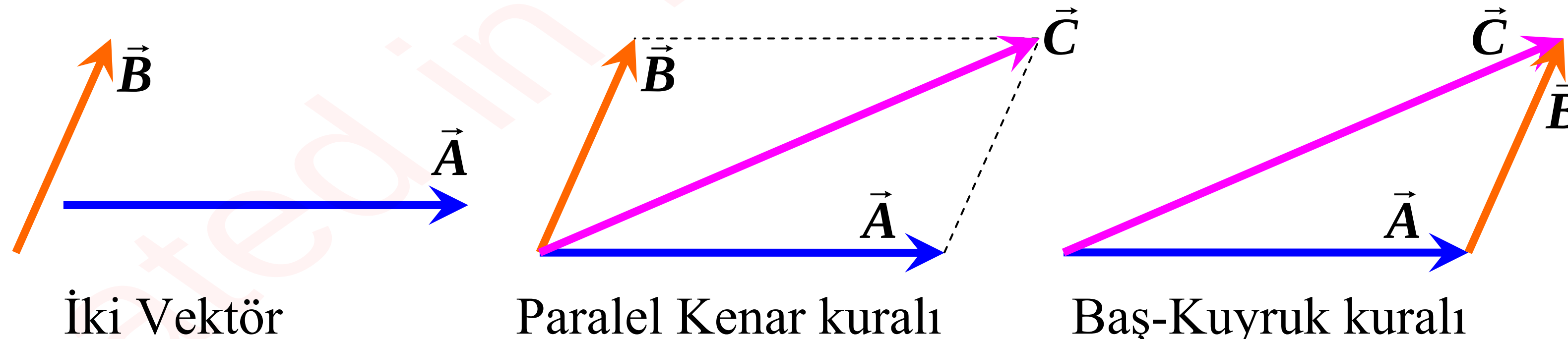


Şekil.1.1: $\vec{A}$ vektörünün grafik gösterimi

İki vektör, aynı büyüklük ve yöne sahipse, uzayın farklı konumlarında bulunsalar bile, özdeştirler. Vektörleri skalerlerden ayırmak için, vektörler yazılırken ya $\vec{A}$ yada $\bar{A}$ veya $\underset{\approx}{A}$ şeklinde gösterilirler. Bu şekillerden biri seçildikten sonra, ne zaman nerede olursa olsun vektörleri skalerlerden ayıran işaret mutlaka konmalıdır. Bazı kitaplarda ise, vektörler koyu olarak yazılarak, skalerlerden ayrılırlar.

Şekil.1.2a'da verildiği gibi, **aynı veya zıt yönlerde olmayan $\vec{A}$ ve $\vec{B}$ gibi iki vektör bir düzlem tanımlar**. Bunların toplamı, aynı düzlemde bulunan başka bir $\vec{C}$ vektörüdür. $\vec{C} = \vec{A} + \vec{B}$, grafik olarak iki şekilde elde edilebilir:

1. **Paralelkenar kuralı:** Bileşke vektör $\vec{C}$, Şekil.1.2b'de gösterildiği gibi, aynı noktadan çizilen $\vec{A}$ ve $\vec{B}$'nin oluşturduğu paralelkenarın köşegen vektörüdür.
2. **Baş-kuyruk kuralı:** $\vec{A}$'nın başı $\vec{B}$'nin kuyruğuna bağlanır. Bunların, toplamı olan $\vec{C}$, $\vec{A}$'nın kuyruğundan $\vec{B}$'nin başına kadar çizilen vektördür ve $\vec{A}$, $\vec{B}$ ve $\vec{C}$ vektörleri, Şekil.1.2c'de gösterildiği gibi, bir üçgen oluştururlar.

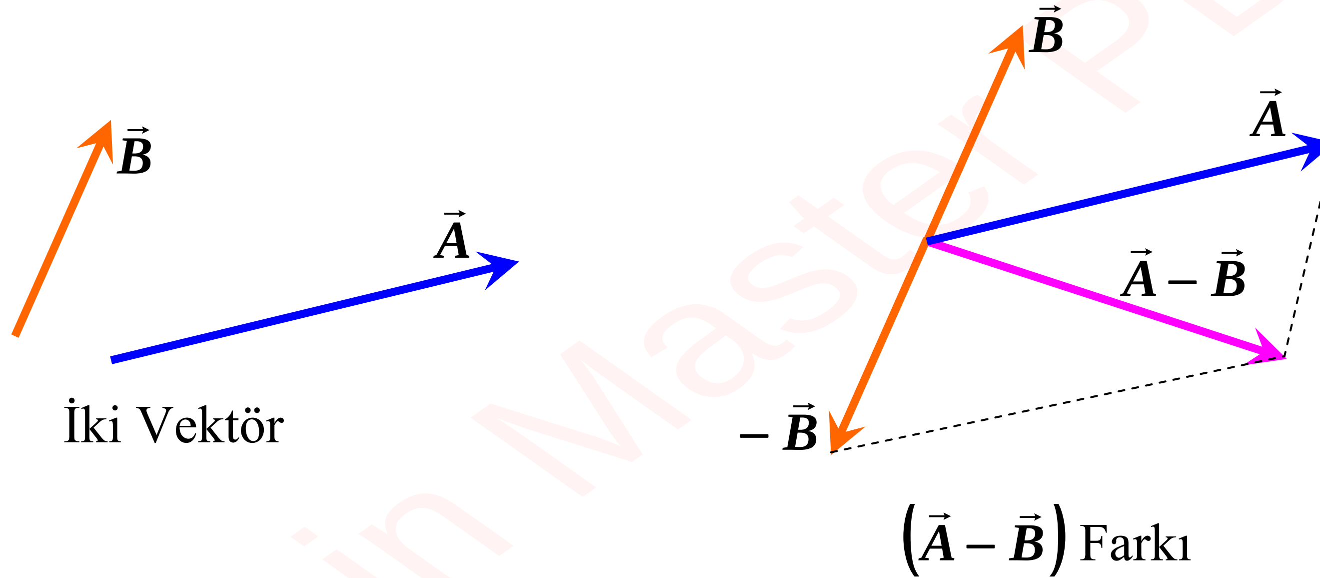


Şekil.1.2: Vektörel toplama, $\vec{C} = \vec{A} + \vec{B}$

Vektörlerin toplanmasının **değişme (commutative)** ve **birleşme (associative)** kanunlarına uydukları açıktır.

Değişme kanunu: $\vec{A}+\vec{B}=\vec{B}+\vec{A}$ (1.4)

Birleşme kanunu: $\vec{A}+(\vec{B}+\vec{C})=(\vec{A}+\vec{B})+\vec{C}$ (1.5)



Şekil.1.3: Vektörel çıkarma

Vektörel çıkarma, vektörlerin toplanması kuralına göre,

$$\vec{A}-\vec{B}=\vec{A}+(-\vec{B}) \quad (1.6)$$

şeklinde tanımlanabilir. Burada $(-\vec{B})$, $\vec{B}$ vektörünün negatifidir; yani, $(-\vec{B})$ ile $\vec{B}$, aynı büyüklüğe fakat zıt yöne sahiptir. Böylece,

$$-\vec{B} = (-\hat{b})B \qquad (1.7)$$

olur. Denk.(1.6) ile temsil edilen işlem, Şekil.1,3'de gösterilmiştir.

1.3. VEKTÖRLERİN ÇARPILMASI

Bir $\vec{A}$ vektörünün pozitif bir k skaleri ile çarpılması, $\vec{A}$ vektörünün yönünü değiştirmeksizin, büyüklüğünü k katına çıkarır (k, 1'den küçük veya büyük olabilir). Buna göre,

$$k\vec{A} = \hat{a}(kA) \qquad (1.8)$$

yazılabilir.

"Bir vektörün başka bir vektörle çarpılması" veya "iki vektörün çarpımı" demek yeterli değildir. Çünkü, iki vektörün iki ayrı ve çok farklı tipte çarpımı vardır. Bunlar; **(1) skaler veya nokta çarpımlar** ve (2) vektörel veya çapraz çarpımlardır.

1.3.1. Skaler Çarpım

$\vec{A}$ ve $\vec{B}$ vektörlerinin $\vec{A}.\vec{B}$ ile gösterilen skaler veya nokta çarpımı $\vec{A}$ ve $\vec{B}$'nin büyüklükleri ile aralarındaki açının kosinüsünün çarpımına eşit olan bir skalerdir. Böylece,

$$\vec{A}\cdot\vec{B} = ABCos\theta_{AB} \qquad (1.9)$$

yazılır. Burada θ_{AB} $\vec{A}$ ile $\vec{B}$ arasındaki dar açıdır ve Şekil.1.4'de gösterildiği gibi, π radyan'dan küçüktür. **İki vektörün skaler çarpımı,**

(1) vektörlerin büyüklüklerinin çarpımına eşit veya daha küçüktür,

(2) aralarındaki açının $\pi/2$ radyan (90^0)'dan daha büyük veya küçük olmasına göre pozitif veya negatif nicelik olabilir,

(3) bir vektörün büyüklüğünün, diğer vektörün birincisi üzerine izdüşümü ile çarpımına eşittir ve

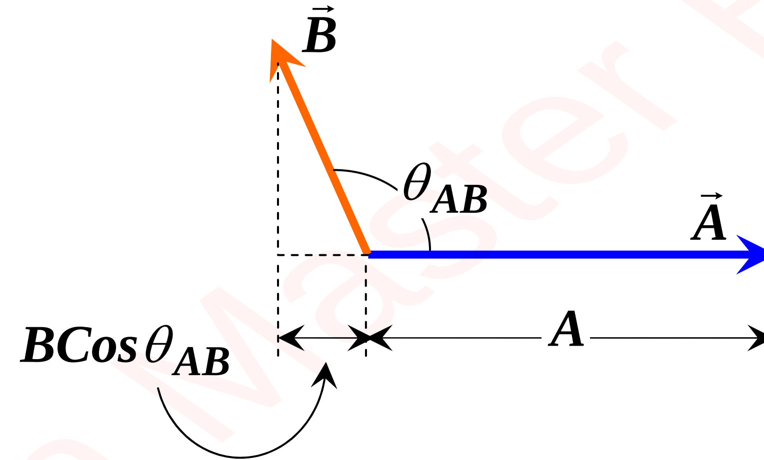
(4) vektörler birbirlerine dik oldukları zaman sıfırdır. Ayrıca,

$$\vec{A}.\vec{A} = A^2 \tag{1.10}$$

veya

$$A = \sqrt{\vec{A}.\vec{A}} \tag{1.11}$$

olduğu açıktır. Denk.(1.11), bir vektör herhangi bir koordinat sisteminde ifade edildiği zaman, onun büyüklüğünün bulunmasını sağlar.



Şekil.1.4: $\vec{A}$ ile $\vec{B}$'nin skaler çarpımı

Skaler çarpım, değişme ve dağılma özelliğine sahiptir:

Değişme kanunu: $\vec{A}.\vec{B} = \vec{B}.\vec{A}$ (1.12)

Dağılma kanunu: $\vec{A}.(\vec{B}+\vec{C}) = \vec{A}.\vec{B} + \vec{A}.\vec{C}$ (1.13)

Değişme kanununun sağlanacağı, Denk.(1.9)'daki skaler çarpım tanımından açıktır ve Denk.(1.13)'ün ispatı, bir alıştırma olarak bırakılmıştır. **Birleşme kanunu, skaler çarpıma uygulanamaz**. Çünkü, ikiden fazla vektör bu şekilde çarpılamaz ve $\vec{A}.\vec{B}.\vec{C}$ **anlamsızdır**.

****

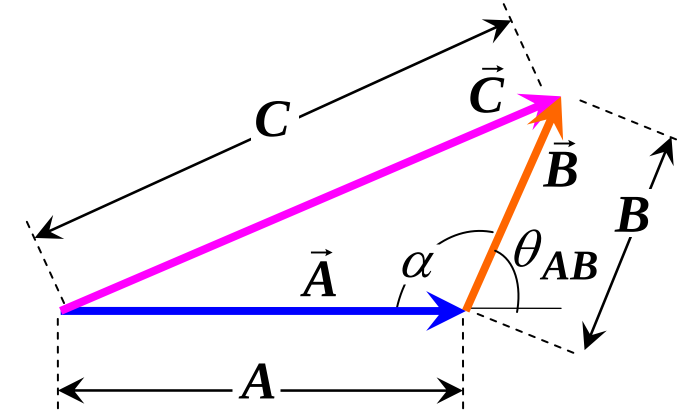
Örnek 1.1: Bir üçgenin kosinüsler kanununu ispatlayınız.

Çözüm 1.1: Kosinüsler kanunu, bir üçgenin bir kenarının uzunluğunu, diğer iki kenarın uzunluğu ve onlar arsındaki açı cinsinden ifade eden skaler bir bağıntıdır. Şekil.1.5'e göre, kosinüsler kanunu,

$$C = \sqrt{A^2 + B^2 - 2AB\cos\alpha}$$

şeklinde ifade edilebilir. Bu ifade, kenarların vektör olarak alınması suretiyle, ispatlanır. Yani,

$$\vec{C} = \vec{A} + \vec{B}$$



Şekil.1.5: Örnek.1.1'e ait şekil

yazılabilir. $\vec{C}$'nin kendisiyle skaler çarpımı alınırsa, Denk.(1.10) ve (1.13)'den,

$$\begin{aligned} C^2 &= \vec{C}.\vec{C} = (\vec{A}+\vec{B}).(\vec{A}+\vec{B}) \\ &= \vec{A}.\vec{A} + \vec{B}.\vec{B} + 2\vec{A}.\vec{B} \\ &= A^2 + B^2 + 2AB\cos\theta_{AB} \end{aligned}$$

bulunur. θ_{AB}'nin, tanımdan dolayı, $\vec{A}$ ile $\vec{B}$ arasındaki dar açı olduğuna ve $(180^0 - \alpha)$'ya eşit olduğuna dikkat ediniz. Böylece,

$$\cos\theta_{AB} = \cos(180^0 - \alpha) = -\cos\alpha$$

olur. Bu yüzden,

$$C^2 = A^2 + B^2 - 2AB\cos\alpha$$

olur ve kosinüsler kanunu doğrudan uygulanır.

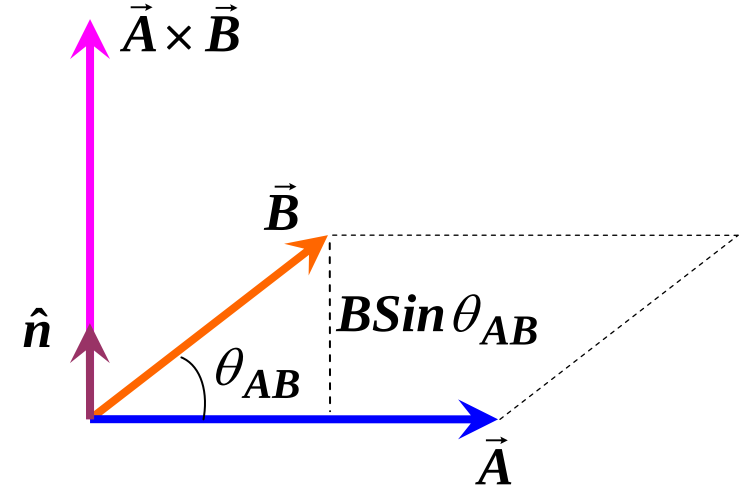
****

1.3.2. Vektörel Çarpım

$\vec{A}\times\vec{B}$ ile gösterilen ve $\vec{A}$ ve $\vec{B}$ gibi iki vektörün vektörel veya çapraz çarpımı, $\vec{A}$ ile $\vec{B}$'nin bulunduğu düzleme dik olan bir vektör verir. Bu vektörün büyüklüğü, $\vec{A}$ ile $\vec{B}$ arasındaki dar açı θ_{AB} olmak üzere, $(AB\sin\theta_{AB})$, yönü ise, parmaklar θ_{AB} açısı boyunca dönderildiği zaman, sağ elin baş parmağının gösterdiği yöndür (sağ el kuralı). Buna göre,

$$\vec{A}\times\vec{B} = \hat{n}\left|ABSin\theta_{AB}\right| \qquad (1.14)$$

yazılabilir. Bu durum, Şekil.1.6'da gösterilmiştir. $\vec{A}$ ile $\vec{B}$ vektörlerinin oluşturduğu **paralelkenarın yüksekliği** $B\sin\theta_{AB}$'ye eşit olduğundan, daima pozitif olan $\vec{A}\times\vec{B}$'nin büyüklüğü olan $\left|AB\sin\theta_{AB}\right|$, nümerik olarak, **paralelkenarın alanına eşittir**.



Şekil 1.6: $\vec{A}$ ile $\vec{B}$'nin vektörel çarpımı

Denk.(1.14)'deki tanımı kullanarak ve sağ el kuralı uygulanarak,

$$\vec{B}\times\vec{A}=-\vec{A}\times\vec{B} \quad (1.15)$$

bulunur. Bu ifadeye göre, **vektörel çarpım değişme özelliğine sahip değildir**. Ancak,

$$\vec{A}\times(\vec{B}+\vec{C})=\vec{A}\times\vec{B}+\vec{A}\times\vec{C} \quad (1.16)$$

ifadesinden, **vektörel çarpımın dağılma kanununa uyduğu görülebilir.**

Vektörel çarpım, birleşme özelliğine sahip değildir. Yani,

$$\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C})\neq(\vec{A}\times\vec{B})\times\vec{C} \quad (1.17)$$

dir. Buradaki ifadenin **sol tarafındaki üçlü çarpımı temsil eden vektör $\vec{A}$'ya diktir ve $\vec{B}$ ile $\vec{C}$'nin bulunduğu düzlem içindedir**. **Halbuki, sağ taraf $\vec{C}$'ye diktir ve $\vec{A}$ ile $\vec{B}$'nin bulunduğu düzlem içindedir**. **Bu yüzden, vektörlerin çarpım sırası önemlidir ve hiçbir durumda parantezler ihmal edilemez**.

1.3.3 Üç Vektör Çarpımı

Skaler üçlü çarpım ve vektörel üçlü çarpım olmak üzere üç vektörün iki cins çarpımı vardır. Bunların en basiti **skaler üçlü çarpımdır** ve,

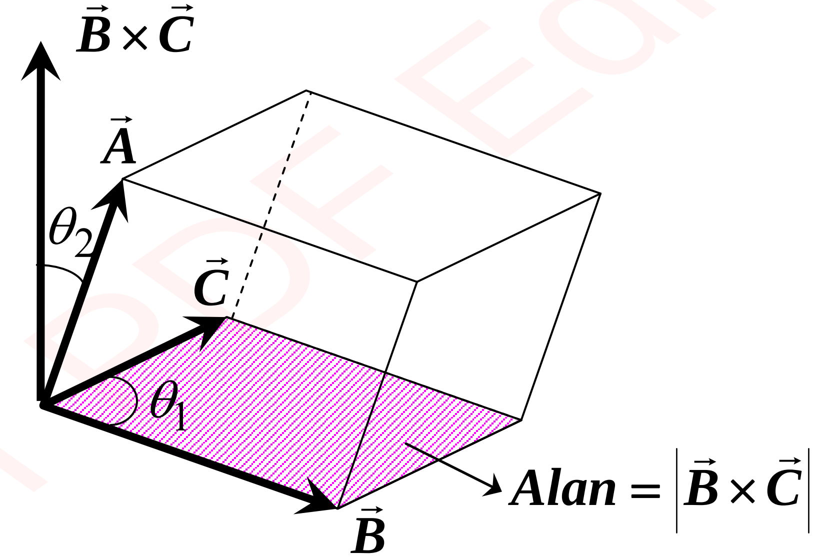
$$\vec{A}.(\vec{B}\times\vec{C})=\vec{B}.(\vec{C}\times\vec{A})=\vec{C}.(\vec{A}\times\vec{B}) \tag{1.18}$$

özeliğine sahiptir. **Burada $\vec{A}$, $\vec{B}$ ve $\vec{C}$ vektörlerinin dönme sırasına dikkat ediniz**. Elbette,

$$\begin{aligned}\vec{A}.(\vec{B}\times\vec{C}) &= -\vec{A}.(\vec{C}\times\vec{B})\\ &= -\vec{B}.(\vec{A}\times\vec{C})\\ &= -\vec{C}.(\vec{B}\times\vec{A})\end{aligned} \tag{1.19}$$

dir. Şekil.1.7'den görüldüğü gibi, Denk.(1.18)'deki üç ifadeden her biri, $\vec{A}$, $\vec{B}$ ve $\vec{C}$ gibi üç vektörün oluşturduğu paralel yüzlünün hacmine eşit bir büyüklüğe sahiptir.

Paralel yüzlü, $\left|\vec{B}\times\vec{C}\right| = \left|BC\sin\theta_1\right|$'e eşit bir alanı olan bir tabana ve $\left|A\cos\theta_2\right|$'ye eşit bir yüksekliğe sahiptir. Böylece, hacmi $\left|ABC\sin\theta_1\cos\theta_2\right|$ olur.



Şekil.1.7: $\vec{A}.(\vec{B}\times\vec{C})$'nin gösterimi

$\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C})$ şeklindeki üçlü vektörel çarpım, iki basit vektörün farkı olarak,

$$\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C}) = \vec{B}(\vec{A}.\vec{C}) - \vec{C}(\vec{A}.\vec{B})$$

şeklinde yazılabilir. Denk.(1.20), "back-cab" kuralı olarak bilinir ve faydalı bir vektörel özdeşliktir.

1.4. ORTOGONAL KOORDİNAT SİSTEMİ

Daha önce belirtildiği gibi, elektromanyetizmanın kanunları koordinat sistemlerinden bağımsız olmasına rağmen, pratik problemlerin çözümü, verilen problemin geometrisine uygun bir koordinat sisteminde ifade edilen, bu kanunlardan türetilmiş bağıntılara ihtiyaç duyar. Örneğin, uzayda belli bir noktadaki elektrik alan tayin edilecekse, kaynağın konumunun ve bu noktanın yerinin bir koordinat sisteminde tanımlanması gerekir. **Üç boyutlu uzayda, bir nokta üç yüzeyin kesişim yeri olarak belirlenebilir**. Genellikle, **bu üç yüzey ailesi, u_1=sbt, u_2=sbt ve u_3=sbt** denklemleri ile tanımlanır. Burada **u'ların hepsinin uzunluk olması gerekmez** (kartezyen koordinat sisteminde u_1, u_2 ve u_3 sırasıyla x, y ve z'ye karşılık gelirler). **Bu üç yüzey, karşılıklı olarak birbirlerine dikse, bir ortagonal koordinat sistemi elde edilmiş olur**. Ortogonal olmayan koordinat sistemleri, problemleri daha karmaşık hale getirdiklerinden dolayı, kullanılmazlar.

Bir koordinat sisteminde, **u_i (i=1, 2, 3) ile temsil edilen bazı yüzeyler düzlemler şeklinde değil de, eğrisel yüzeyler olabilirler**. $\hat{u}_1, \hat{u}_2$ ve $\hat{u}_3$, üç koordinat ekseni yönündeki birim vektörler olsunlar. Bunlar, birim veya temel vektörler olarak adlandırılırlar. Genel bir sağ-el, ortogonal, eğrisel koordinat sisteminde, birim vektörler,

$$\hat{u}_1 \times \hat{u}_2 = \hat{u}_3 \quad (1.21a)$$

$$\hat{u}_2 \times \hat{u}_3 = \hat{u}_1 \quad (1.21b)$$

$$\hat{u}_3 \times \hat{u}_1 = \hat{u}_2 \quad (1.21c)$$

bağıntıları sağlanacak şekilde düzenlenirler. Bu birim vektörlerden birinin tanımlanması, otomatik olarak diğer ikisini bağladığından, bu üç denklem tamamen bağımsız değildirler. Tabii ki,

$$\hat{u}_1 . \hat{u}_2 = \hat{u}_2 . \hat{u}_3 = \hat{u}_3 . \hat{u}_1 = 0 \quad (1.22)$$

$$\hat{u}_1 . \hat{u}_1 = \hat{u}_2 . \hat{u}_2 = \hat{u}_3 . \hat{u}_3 = 1 \quad (1.23)$$

elde edilir. Herhangi bir $\vec{A}$ vektörü, ortagonal yöndeki üç bileşenin toplamı olarak,

$$\vec{A} = \hat{u}_1 A_{u1} + \hat{u}_2 A_{u2} + \hat{u}_3 A_{u3} \qquad (1.24)$$

şeklinde yazılabilir. Burada A_{u1}, A_{u2} ve A_{u3} bileşenlerinin büyüklükleri, $\vec{A}$'nın konumuyla değişebilir. Yani, bunlar u_1, u_2 ve u_3'ün fonksiyonları olabilirler. Denk.(1.24)'den, $\vec{A}$'nın büyüklüğü,

$$A = \left|\vec{A}\right| = \left(A_{u1}^2 + A_{u2}^2 + A_{u3}^2\right)^{1/2} \qquad (1.25)$$

olur.

****

Örnek.1.2: $\vec{A}$, $\vec{B}$ ve $\vec{C}$ şeklinde verilen üç vektör için, ortogonal eğrisel koordinat sisteminde (u_1, u_2, u_3), **(a)** $\vec{A}.\vec{B}$'ye, **(b)** $\vec{A}\times\vec{B}$'ye, **(c)** $\vec{C}.(\vec{A}\times\vec{B})$'ye ait ifadeleri elde ediniz.

Çözüm.1.2: İlk önce $\vec{A}$, $\vec{B}$ ve $\vec{C}$, ortagonal koordinatlarda (u_1, u_2, u_3),

$$\vec{A} = \hat{u}_1 A_{u1} + \hat{u}_2 A_{u2} + \hat{u}_3 A_{u3}$$

$$\vec{B} = \hat{u}_1 B_{u1} + \hat{u}_2 B_{u2} + \hat{u}_3 B_{u3}$$

$$\vec{C} = \hat{u}_1 C_{u1} + \hat{u}_2 C_{u2} + \hat{u}_3 C_{u3}$$

şeklinde yazılabilir.

(a) Denk.(1.22) ve (1.23) kullanılarak,

$$\vec{A}.\vec{B} = (\hat{u}_1 A_{u1} + \hat{u}_2 A_{u2} + \hat{u}_3 A_{u3}).(\hat{u}_1 B_{u1} + \hat{u}_2 B_{u2} + \hat{u}_3 B_{u3})$$

$$= A_{u1}B_{u1} + A_{u2}B_{u2} + A_{u3}B_{u3} \qquad (1.26)$$

elde edilir.

(b) $$\vec{A} \times \vec{B} = (\hat{u}_1 A_{u1} + \hat{u}_2 A_{u2} + \hat{u}_3 A_{u3}) \times (\hat{u}_1 B_{u1} + \hat{u}_2 B_{u2} + \hat{u}_3 B_{u3})$$

$$= \hat{u}_1 (A_{u2}B_{u3} - A_{u3}B_{u2}) + \hat{u}_2 (A_{u3}B_{u1} - A_{u1}B_{u3})$$

$$+ \hat{u}_3 (A_{u1}B_{u2} - A_{u2}B_{u1})$$

$$= \begin{vmatrix} \hat{u}_1 & \hat{u}_2 & \hat{u}_3 \\ A_{u1} & A_{u2} & A_{u3} \\ B_{u1} & B_{u2} & B_{u3} \end{vmatrix} \quad (1.27)$$

Denk.(1.26) ve (1.27) sırasıyla, iki vektörün ortogonal eğrisel koordinatlardaki skaler ve vektörel çarpımlarıdır.

(c) Denk.(1.26) ve (1.27)'de elde edilen sonuçlar birleştirilerek,

$$\vec{C}.(\vec{A} \times \vec{B}) = C_{u1}(A_{u2}B_{u3} - A_{u3}B_{u2}) + C_{u2}(A_{u3}B_{u1} - A_{u1}B_{u3})$$

$$+C_{u3}(A_{u1}B_{u2} - A_{u2}B_{u1})$$

$$= \begin{vmatrix} C_{u1} & C_{u2} & C_{u3} \\ A_{u1} & A_{u2} & A_{u3} \\ B_{u1} & B_{u2} & B_{u3} \end{vmatrix} \quad (1.28)$$

elde edilir. Bu denklem, Denk.(1.18) ve Denk.(1.19) ile verilen ifadeleri ispatlamak için kullanılabilir. Denk.(1.28)'in sol tarafındaki vektörlerin sırasının değiştirilmesinin,

basitçe, sağdaki determinantın satırlarının yeniden düzenlenmesini gerektirdiği açıktır.

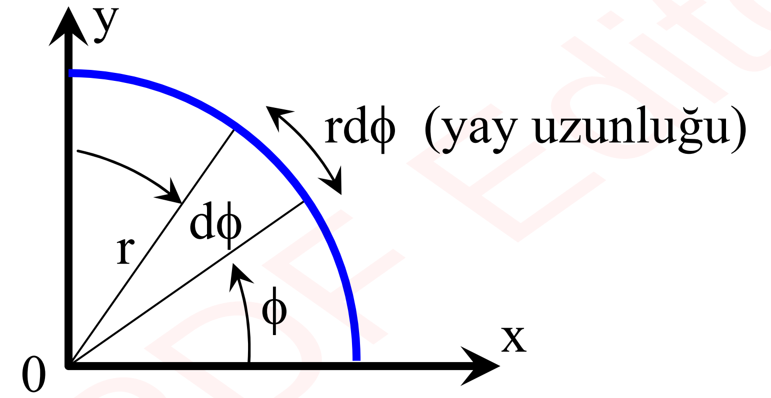
****

Vektörel hesapta (ve elektromanyetik çalışmada), sık sık çizgisel, yüzey ve hacim integrallerinin alınması gerekir. Her durumda, koordinatların birindeki bir diferansiyel değişime karşı gelen diferansiyel uzunluk değişimini ifade etmek gerekir. Bununla beraber, **koordinatların bazısı, örneğin u_i (i=1,2,3) bir uzunluk olmayabilir ve bir du_i diferansiyel değişimi, dl_i şeklindeki bir uzunluk değişimine dönüştürmek için bir dönüşüm çarpanı gerekir.** Bu yüzden,

$$dl_i = h_i du_i \tag{1.29}$$

yazılabilir. Burada h_i, **metrik katsayı olarak adlandırılır** ve kendiside u_1, u_2 ve u_3'ün fonksiyonu olabilir. Örneğin, iki boyutlu kutupsal koordinatlarda; $(u_1, u_2) = (r, \phi)$, $\phi(= u_2)$'deki $d\phi(= du_2)$ diferansiyel değişimi, $\hat{\phi}(= \hat{u}_2)$ yönünde $dl_2 = r d\phi$ $(h_2 = r = u_1)$'lik bir diferansiyel uzunluk değişimine karşılık gelir. Keyfi bir

yöndeki yönlü bir diferansiyel uzunluk değişimi, bileşen uzunluk değişimlerinin vektörel toplamı olarak,



$$d\vec{l} = \hat{u}_1 dl_1 + \hat{u}_2 dl_2 + \hat{u}_3 dl_3 \qquad (1.30)$$

veya

$$d\vec{l} = \hat{u}_1 (h_1 du_1) + \hat{u}_2 (h_2 du_2) + \hat{u}_3 (h_3 du_3) \qquad (1.31)$$

şeklinde yazılabilir. Denk.(1.25)'e göre, $d\vec{l}$'nin büyüklüğü,

$$dl = \left[(dl_1)^2 + (dl_2)^2 + (dl_3)^2 \right]^{1/2}$$

$$= \left[(h_1 du_1)^2 + (h_2 du_2)^2 + (h_3 du_3)^2 \right]^{1/2} \qquad (1.32)$$

olur. $\hat{u}_1, \hat{u}_2$ ve $\hat{u}_3$ yönlerindeki du_1, du_2 ve du_3 diferansiyel koordinat değişimleriyle oluşturulan diferansiyel dv hacmi, $(dl_1 dl_2 dl_3)$ olur veya,

$$dv = h_1 h_2 h_3 du_1 du_2 du_3 \qquad (1.33)$$

yazılabilir. Daha sonra, bir diferansiyel yüzeyden geçen akım veya akıyı ifade etme imkanı olacaktır. Böyle durumlarda, akım veya akıya dik olan kesit alanı kullanılmalıdır. Bunun yanında, diferansiyel yüzey alanını, yüzeye dik yönlü bir vektör olarak göz önüne almak uygun olur, yani,

$$d\vec{s} = \hat{n}ds \qquad (1.34)$$

yazılabilir. Örneğin, $\vec{J}$ akım yoğunluğu, büyüklüğü ds olan diferansiyel yüzey alanına dik değilse, ds'den geçen dI akımı, $\vec{J}$'nin yüzey alanına dik bileşenin yüzey alanıyla çarpımına eşit olmalıdır. Denk.(1.34)'deki gösterim kullanılarak basitçe,

$$dI = \vec{J}.d\vec{s} = \vec{J}.\hat{n}ds \qquad (1.35)$$

yazılabilir. Genel eğrisel ortogonal koordinatlarda, $\hat{u}_1$ birim vektörüne dik olan $d\vec{s}_1$ diferansiyel yüzey elemanı,

$$d\vec{s}_1 = \hat{u}_1(dl_2dl_3)$$

veya

$$d\vec{s}_1 = \hat{u}_1(h_2h_3du_2du_3) \qquad (1.36)$$

olur. Benzer şekilde, $\hat{u}_2$ ve $\hat{u}_3$ birim vektörlerine dik olan diferansiyel yüzey elemanı, sırasıyla,

$$d\vec{s}_2 = \hat{u}_2(h_1 h_3 du_1 du_3) \quad (1.37)$$

ve

$$d\vec{s}_3 = \hat{u}_3(h_1 h_2 du_1 du_2) \quad (1.38)$$

dir.

Pek çok ortogonal koordinat sistemi vardır, ancak biz sadece, en yaygın ve en kullanışlı üç koordinat sistemi ile ilgileneceğiz. Aşağıdaki alt bölümlerde ayrı ayrı incelenecek olan bu koordinat sistemleri

1. Kartezyen (veya dik) koordinatlar
2. Silindirik koordinatlar
3. Küresel koordinatlar

dır.

1.4.1. Kartezyen Koordinatlar Sistemi

Kartezyen koordinatların değişkenleri,

$(u_1, u_2, u_3) = (x, y, z)$

dir. Kartezyen koordinatlarda bir P(x,y,z) noktası, Şekil.1.9'da gösterildiği gibi, $x = x_1$, $y = y_1$ ve $z = z_1$ ile tanımlanan üç yüzeyin kesişme noktasıdır. Bu sistem,

$(\hat{x}) \times (\hat{y}) = \hat{z}$ (1.39a)

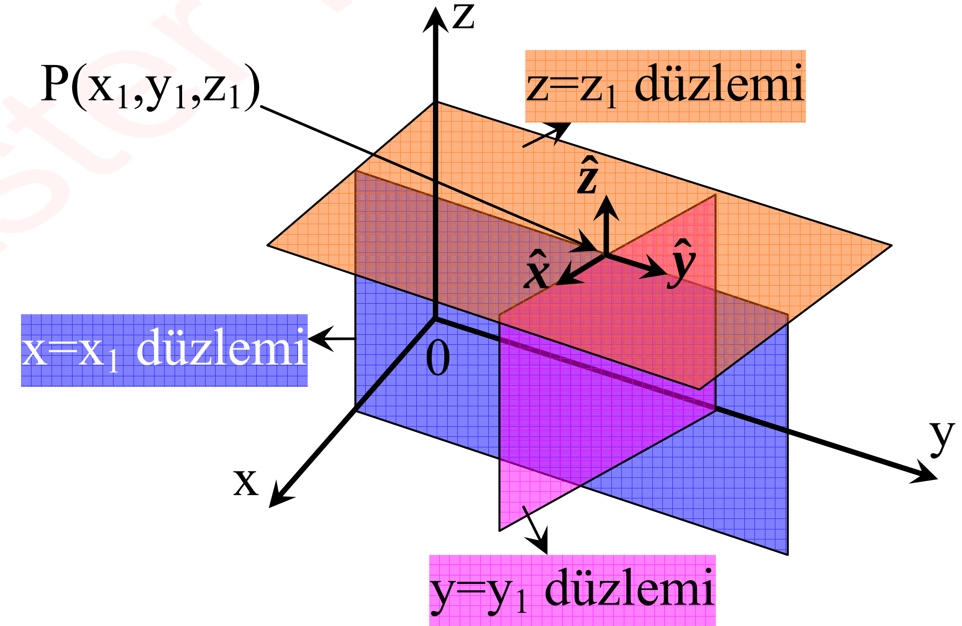
$(\hat{y}) \times (\hat{z}) = \hat{x}$ (1.39b)

$(\hat{z}) \times (\hat{x}) = \hat{y}$ (1.39c)

bağıntılarını sağlayan $\hat{x}$, $\hat{y}$ ve $\hat{z}$ birim vektörlü bir sağ-el sistemidir.

$P(x_1, y_1, z_1)$ noktasına uzanan yer vektörü,

$\overline{OP} = \hat{x}x_1 + \hat{y}y_1 + \hat{z}z_1$ (1.40)



Şekil.1.9: Kartezyen Koordinatlar

dir. Kartezyen koordinatlarda, bir $\vec{A}$ vektörü,

$$\vec{A} = \hat{x}A_x + \hat{y}A_y + \hat{z}A_z \tag{1.41}$$

şeklinde yazılabilir. $\vec{A}$ ve $\vec{B}$ gibi iki vektörün skaler çarpımı, Denk.(1.26)'dan

$$\vec{A}.\vec{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z \tag{1.42}$$

dir. $\vec{A}$ ve $\vec{B}$ vektörlerinin çapraz çarpımı, Denk.(1.27)'den,

$$\vec{A} \times \vec{B} = \hat{x}(A_y B_z - A_z B_y) + \hat{y}(A_z B_x - A_x B_z) + \hat{z}(A_x B_y - A_y B_x)$$

$$= \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} \tag{1.43}$$

şeklinde yazılabilir. **x, y ve z'nin kendileri uzunluk olduğundan**, üç metrik katsayının hepsi de "bir" dir. Yani $h_1 = h_2 = h_3 = 1$ olur. Diferansiyel alan ve diferansiyel hacim elemanı ifadeleri, Denk.(1.31), (1.36), (1.37), (1.38) ve (1.33)'den sırasıyla,

$$d\vec{l} = \hat{x}dx + \hat{y}dy + \hat{z}dz \qquad (1.44)$$

$$d\vec{s}_x = \hat{x}dydz \qquad (1.45a)$$

$$d\vec{s}_y = \hat{y}dxdz \qquad (1.45b)$$

$$d\hat{s}_z = \hat{z}dxdy \qquad (1.45c)$$

ve

$$dv = dxdydz \qquad (1.46)$$

dir.

****

Örnek.1.4: $\int_{P_1}^{P_2} \vec{F}.d\vec{l}$ şeklindeki bir vektörel alanın skaler çizgi integrali, hem fizikte hem de elektromanyetikte çok önemlidir (Eğer $\vec{F}$ bir kuvvet ise, bu integral, belli bir yol boyunca P_1'den P_2'ye giderken kuvvet tarafından yapılan iş olur. Eğer $\vec{F}$, $\vec{E}$ elektrik alan şiddeti ile değiştirilirse, o zaman bu integral bir elektromotor kuvvetini

temsil eder). $\vec{F} = \hat{x}xy + \hat{y}(3x - y^2)$ olduğu kabul edilsin. Bu skaler integrali, Şekil.1.10'daki; (a) 1-doğrusal yolu boyunca, (b) 2-nolu P_1AP_2 yolu boyunca $P_1(5,6)$'dan $P_2(3,3)$'e kadar hesaplayınız.

Çözüm.1.4: İlk önce $\vec{F}.d\vec{l}$ çarpımı kartezyen koordinatlarda yazılmalıdır. Bu, iki boyutlu problem olduğundan, Denk.(1.44)'den,

$$\vec{F}.d\vec{l} = \left[\hat{x}xy + \hat{y}(3x - y^2)\right].(\hat{x}dx + \hat{y}dy)$$

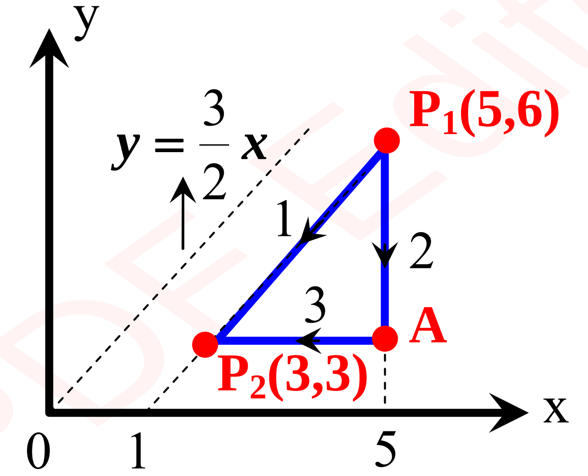
$$= xydx + (3x - y^2)dy \qquad (1.47)$$

elde edilir. Kartezyen koordinatlarda $d\vec{l}$'nin daima, yola veya integrasyon yönüne bakılmaksızın Denk.(1.44) ile verildiğini hatırlatmak gerekir. İntegrasyon yönü, integralde uygun sınırlar kullanılarak, hesaba katılır.

(a) 1-yolu boyunca: P_1P_2 yolunun deklemi,

$$y = \frac{3}{2}(x - 1) \qquad (1.48)$$

dir. Bu sonuç, P_1P_2 çizgisinin eğiminin (3/2) olduğu (bkz. Şekil.1.10) dikkate alınarak elde edilebilir. Böylece y=(3/2)x, orjinden geçen ve P_1P_2'ye paralel olan kesikli çizginin denklemi olur. P_1P_2 çizgisi, x-eksenini x=+1'de kestiğinden, bunun deklemi, kesikli çizgi denkleminin pozitif x-yönünde bir birim kaydırılmış halidir. Bu ifade x ile (x-1) değiştirilerek elde edilebilir. Denk.(1.47) ve (1.48)'den,



Şekil.1.10: Örnek.1.4'deki integrasyon yolu

$$\underset{\substack{P_1 \\ 1-yolu}}{\overset{P_2}{\int}} \vec{F} \cdot d\vec{l} = \underset{\substack{P_1 \\ 1-yolu}}{\overset{P_2}{\int}} \left[xy\,dx + \left(3x - y^2\right) dy \right]$$

$$= \int_5^3 \frac{3}{2} x(x-1)\,dx + \int_6^3 (2y + 3 - y^2)\,dy$$

$$= -37 + 27 = -10$$

bulunur. Burada, y'ye göre integrasyonda, Denk.(1.48)'den türetilen 3x=2y+3 bağıntısı kullanıldı.

(b) 2-yolu boyunca: Bu yol iki düz çizgi parçasına sahiptir:

P_1'den A'ya: x=5, dx=0, $\vec{F}.d\vec{l} = (15 - y^2)dy$

A'dan P_2'ye: y=3, dy=0, $\vec{F}.d\vec{l} = 3xdx$

Böylece,

$$\int_{P_1}^{P_2} \vec{F} \cdot d\vec{l} = \int_{\substack{P_1 \\ 2-yolu}}^{A} (15 - y^2)\, dy + \int_{\substack{A \\ 3-yolu}}^{P_2} 3x\, dx = 18 - 24 = -6$$

elde edilir. **Burada çizgi integralinin değerinin integrasyon yoluna bağlı olduğuna dikkat ediniz. Böyle bir durumda, $\vec{F}$ vektörel alanının korunumlu (konservatif) olmadığı söylenir.**

****

1.4.2. Silindirik Koordinatlar

Silindirik koordinatlarda, koordinat değişkenleri,

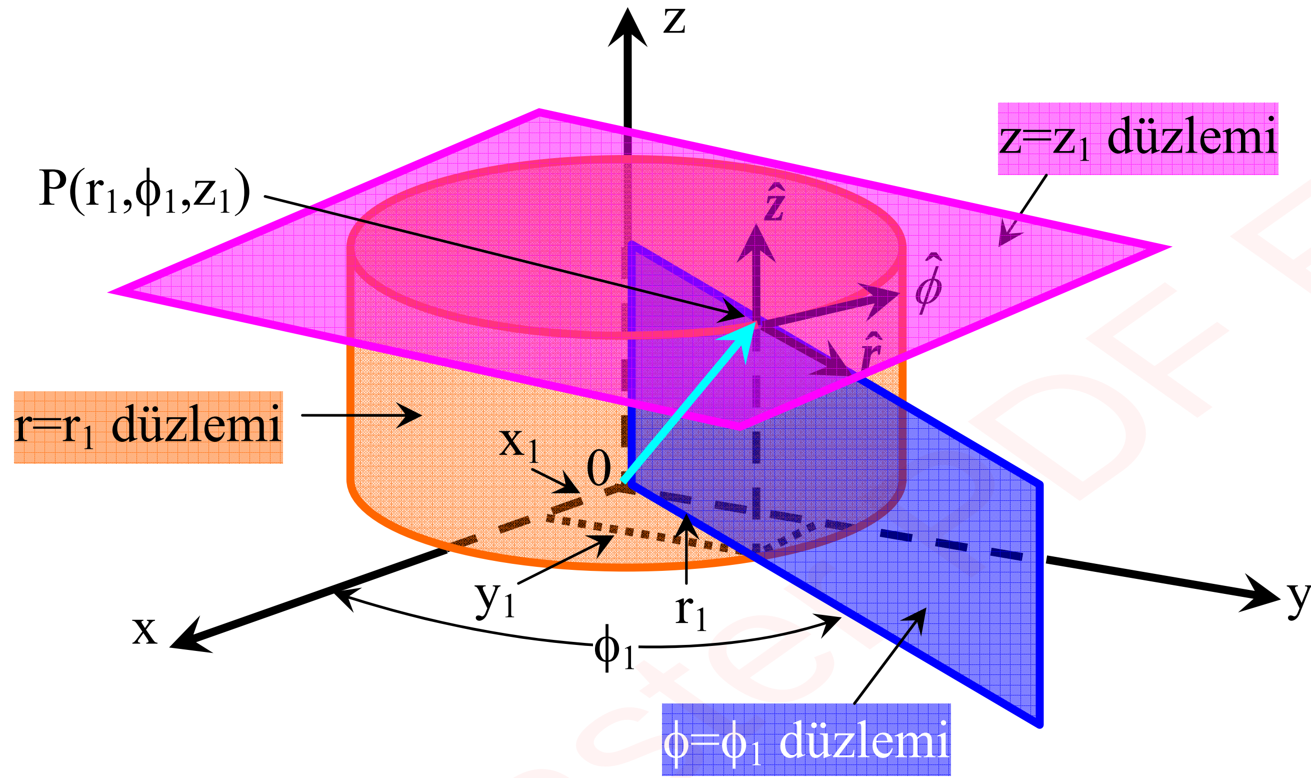
$$(u_1, u_2, u_3) = (r, \phi, z)$$

dir. Ayrıca bu koordinatlarda, bir $P(r_1, \phi_1, z_1)$ noktası $r=r_1$ olan dairesel silindirik bir yüzeyin xz-düzlemi ile $\phi = \phi_1$ açısı yapan ve z eksenini içeren bir yarı düzlemin ve $z=z_1$'de xy-düzlemine paralel olan bir düzlemin kesişme noktasıdır. Şekil.1.11'de gösterildiği gibi; ϕ açısı pozitif x-ekseninden itibaren ölçülür ve $\hat{\phi}$ temel vektörü silindirik yüzeye teğettir. Silindirik koordinatlarda, sağ-el kuralına uygun olarak,

$$\hat{r} \times \hat{\phi} = \hat{z} \tag{1.49a}$$

$$\hat{\phi} \times \hat{z} = \hat{r} \tag{1.49b}$$

$$\hat{z} \times \hat{r} = \hat{\phi} \tag{1.49c}$$



Şekil.1.11: Silindirik koordinatlar

bağıntıları geçerlidir. Silindirik koordinatlar, uzun çizgisel yük ve akım ihtiva eden problemler için ve silindirik veya dairesel sınırların mevcut olduğu yerlerde önemlidir. İki boyutlu kutupsal koordinatlar z=0'da özel bir durumdur. Silindirik koordinatlarda bir vektör,

$$\vec{A} = \hat{r}A_r + \hat{\phi}A_\phi + \hat{z}A_z \tag{1.50}$$

şeklinde yazılır. Silindirik koordinatlarda iki vektörün skaler ve vektörel çarpımlarına ait ifadeler, Denk.(1.26) ve (1.27)'den elde edilebilir.

r ve z (u_1 ve u_3) koordinatlarının kendileri uzunluk olduğundan, $h_1 = h_3 = 1$ olur. Bununla beraber; ϕ, $d\phi$'yi dl_2'ye dönüştürmek için $h_2 = r$ şeklinde bir metrik katsayıya ihtiyaç duyan bir açıdır. O halde silindirik uzunluk elemanı için genel ifade, Denk.(1.31)'den,

$$d\vec{l} = \hat{r}dr + \hat{\phi}rd\phi + \hat{z}dz \tag{1.51}$$

şeklinde yazılabilir. Diferansiyel yüzey ve hacim elemanları ise,

$$d\vec{s}_r = \hat{r}rd\phi dz \tag{1.52a}$$

$$d\vec{s}_\phi = \hat{\phi}drdz \tag{1.52b}$$

$$d\vec{s}_z = \hat{z}rdrd\phi \tag{1.52c}$$

ve

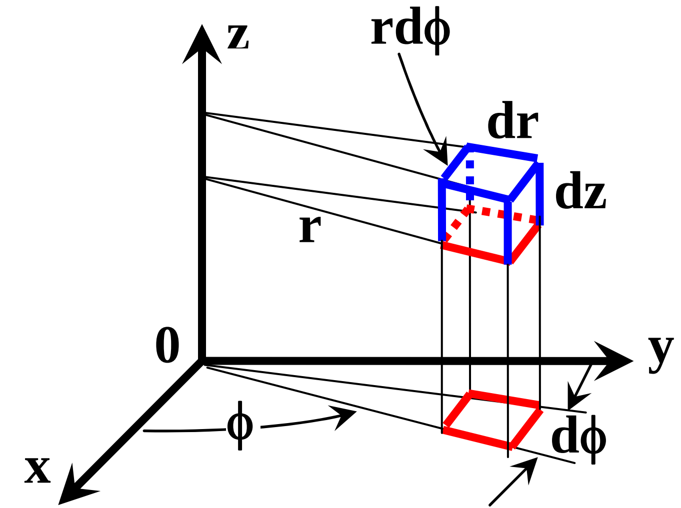
$$dv = r dr d\phi dz \qquad (1.53)$$

şeklinde ifade edilebilir. Üç ortogonal koordinat yönünde, dr, $d\phi$ ve dz diferansiyel değişimlerinden oluşan, bir (r,ϕ,z) noktasındaki diferansiyel hacim elemanı Şekil.1.12'de gösterilmiştir.

Silindirik koordinatlarda verilen bir vektör, kartezyen koordinatlardaki bir vektöre (veya tersi) dönüştürülebilir. Bunun için,

$$\vec{A} = \hat{r}A_r + \hat{\phi}A_\phi + \hat{z}A_z$$

vektörünün kartezyen koordinatlarda gösterilmesi yani, $\vec{A}$ vektörünün $\hat{x}A_x + \hat{y}A_y + \hat{z}A_z$ şeklinde yazılması ve A_x, A_y, ve A_z bileşenlerinin belirlenmesi istenmiş olsun. Öncelikle, A_z bileşeninin silindirik koordinatlardan kartezyene dönüşümde



Şekil.1.12: Silindirik koordinatlarda diferansiyel hacim elemanı

değişmediğini belirtelim. A_x bileşenini bulmak için, $\vec{A}$'ya ait her iki ifadeyi skaler olarak $\hat{x}$ birim vektörü ile çarpıp, eşitleyelim. Böylece,

$$A_x = \vec{A}.\hat{x} = A_r\hat{r}.\hat{x} + A_\phi\hat{\phi}.\hat{x}$$

yazılabilir. $\hat{z}.\hat{x} = 0$ olduğundan, A_z'yi içeren terim yok olur. $\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}$ ve $\hat{\phi}$ temel vektörlerinin bağıl konumlarını gösteren Şekil.1.13'den,

$$\hat{r}.\hat{x} = \cos\phi \qquad (1.54)$$

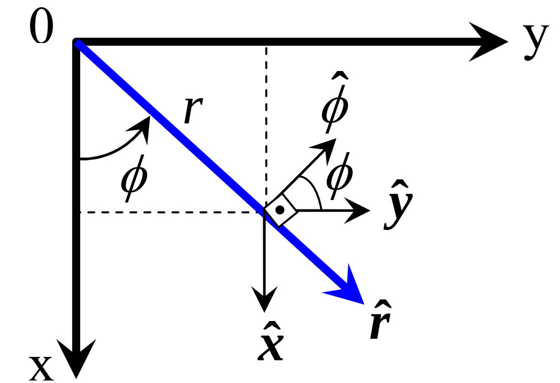
ve

$$\hat{\phi}.\hat{x} = \cos(\frac{\pi}{2} + \phi) = -\sin\phi \qquad (1.55)$$

olduğu görülebilir. Buradan,

$$A_x = A_r\cos\phi - A_\phi\sin\phi \qquad (1.56)$$

yazılır. Benzer şekilde, A_y'yi bulmak için, $\vec{A}$'nın her iki ifadesi $\hat{y}$ ile skaler olarak çarpılırsa,



Şekil.1.13: $\hat{x}$, $\hat{y}$, $\hat{z}$ ve $\hat{\phi}$ arasındaki bağıntı

$$A_y = \vec{A}.\hat{y} = A_r\hat{r}.\hat{y} + A_\phi\hat{\phi}.\hat{y}$$

elde edilir. Şekil.1.13’den,

$$\hat{r}.\hat{y} = \cos(\frac{\pi}{2} - \phi) = \sin\phi \qquad (1.57)$$

ve

$$\hat{\phi}.\hat{y} = \cos\phi \qquad (1.58)$$

bulunur. Buradan,

$$A_y = A_r\sin\phi + A_\phi\cos\phi \qquad (1.59)$$

elde edilir. Bir vektörün kartezyen ve silindirik koordinatları bileşenleri arasındaki bağıntıları,

$$\begin{bmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\phi & -\sin\phi & 0 \\ \sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} A_r \\ A_\phi \\ A_z \end{bmatrix} \qquad (1.60)$$

şeklinde matris formunda yazmak mümkündür. Buradaki problem, Denk.(1.60)'daki $\cos\phi$ ve $\sin\phi$'nin kartezyen koordinatlara dönüştürülmesi dışında çözülmüştür. Bundan başka; A_r, A_ϕ ve A_z'in kendileri r, ϕ ve z'nin fonksiyonu olabilirler. Bu durumda, nihai sonuçta onlar da x, y ve z'nin fonksiyonlarına dönüştürülmelidir. Şekil.1.13'den

$$x = r\cos\phi \tag{1.61a}$$

$$y = r\sin\phi \tag{1.61b}$$

$$z = z \tag{1.61c}$$

şeklindeki dönüşüm formülleri elde edilebilir. Ters bağıntılar (yani, kartezyenden silindirik koordinatlara dönüşüm bağıntıları),

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \tag{1.62a}$$

$$\phi = \tan^{-1}(y/x) \tag{1.62b}$$

$$z = z \tag{1.62c}$$

****

Örnek.1.5: $\vec{A}=[\hat{r}(3\cos\phi)-\hat{\phi}2r+\hat{z}5]$ vektörünü kartezyen koordinatlarda ifade ediniz.

Çözüm.1.5: Doğrudan, Denk.(1.60) kullanılarak,

$$\begin{bmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\phi & -\sin\phi & 0 \\ \sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3\cos\phi \\ -2r \\ 5 \end{bmatrix}$$

veya

$$\vec{A} = \hat{x}(3\cos^2\phi + 2r\sin\phi) + \hat{y}(3\sin\phi\cos\phi - 2r\cos\phi) + \hat{z}5$$

olur. Fakat, Denk.(1.61) ve (1.62)'den,

$$\cos\phi = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

ve

$$\sin\phi = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

dir. Bu yüzden,

$$\vec{A} = \hat{x}\left(\frac{3x^2}{x^2 + y^2} + 2y\right) + \hat{y}\left(\frac{3xy}{x^2 + y^2} - 2x\right) + \hat{z}5$$

bulunur.

****

Örnek.1.6: $\vec{F} = \hat{x}xy - \hat{y}2x$ için,

$$\int_A^B \vec{F}.d\vec{l}$$

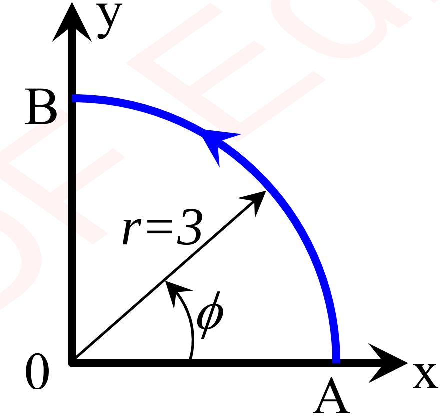
skaler çizgi integralini, Şekil.1.14'de gösterilen çeyrek daire boyunca hesaplayınız.

Çözüm.1.6: Bu problem, kartezyen ve silindirik koordinatlarda olmak üzere iki yoldan çözülebilir.

(a) Kartezyen koordinatlarda: Verilen $\vec{F}$ ve Denk.(1.44)'deki $d\vec{l}$ ifadesinden,

$$\vec{F}.d\vec{l} = xydx - 2xdy$$

elde edilir. Çeyrek dairenin denklemi $x^2 + y^2 = 9$ $(0 \le x, y \le 3)$ olduğundan,



Şekil.1.14: Örnek-1.6'daki integral yolu

$$\int_A^B \vec{F}.d\vec{l} = \int_3^0 x\sqrt{9-x^2}dx - 2\int_0^3 \sqrt{9-y^2}dy$$

$$= -9(1+\frac{\pi}{2})$$

elde edilir.

(b) Silindirik koordinatlarda: Burada, önce $\vec{F}$ silindirik koordinatlara dönüştürülmelidir. Denk.(1.55)'in tersi alınarak,

$$\begin{bmatrix} A_r \\ A_\phi \\ A_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\phi & -\sin\phi & 0 \\ \sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\phi & \sin\phi & 0 \\ -\sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{bmatrix} \qquad (1.63)$$

elde edilir. Bu da,

$$\vec{F} = \hat{r}\left(xy\cos\phi - 2x\sin\phi\right) - \hat{\phi}\left(xy\sin\phi + 2x\cos\phi\right)$$

eşitliğini verir. Bu problem için, integrasyon yolu, yarıçapı 3 olan bir çeyrek daire boyunca olur. Yol boyunca, r ve z'de hiçbir değişim yoktur ($dr = 0$ ve $dz = 0$).

Böylece Denk.(1.51);

$$d\vec{l} = \hat{\phi}3d\phi$$

olur ve

$$\vec{F}.d\vec{l} = -3(xy\sin\phi + 2x\cos\phi)d\phi$$

elde edilir. Dairesel yol nedeniyle, F_r mevcut integrasyon için önemsizdir. Yol boyunca, $x = 3\cos\phi$ ve $y = 3\sin\phi$ olduğundan,

$$\int_A^B \vec{F}.d\vec{l} = \int_0^{\pi/2} -3\left(9\sin^2\phi\cos\phi + 6\cos^2\phi\right)d\phi$$

$$= -9\left(\sin^3\phi + \phi + \sin\phi\cos\phi\right|_0^{\pi/2}$$

$$= -9\left(1 + \frac{\pi}{2}\right)$$

elde edilir. Bu eşitlik, daha önceki sonuç ile aynıdır.

Bu özel örnekte, $\vec{F}$ kartezyen koordinatlarda verilmiştir ve yol daireseldir. Problemi herhangi bir koordinat sisteminde çözmek için, hiçbir zorlayıcı neden yoktur.

****

Örnek-1.7: $\vec{F} = \hat{r}k_1 / r + \hat{z}k_2 z$ için, $\oint \vec{F} \cdot d\vec{s}$ skaler yüzey integralini, Şekil.1.15'de gösterildiği gibi, $z = \pm 3$ ve $r = 2$ ile tanımlanan z-ekseni etrafındaki kapalı bir silindirin yüzeyi üzerinde hesaplayınız.

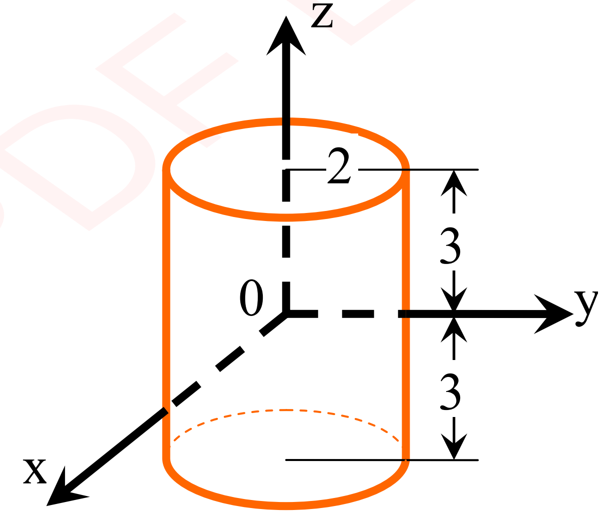
Çözüm-1.7: Denk.(1.34) ile ilgili olarak $d\vec{s}$'nin yönünün yüzeye dik olduğu belirtilmişti. Bu ifade gerçekten açık değildir. Çünkü, bir yüzeye dik birim vektör, iki yönden herhangi birine yönelmiş olabilir. Denk.(1.35)'de hiçbir şüpheli durum yoktur. Çünkü, $\hat{n}$'nin seçimi, basitçe, akım akışının referans yönünü tayin eder. Mevcut durumda, ki burada $\vec{F} . d\vec{s}$ kapalı bir yüzey (bu durum, integral işareti

üzerindeki daire ile belirtilmiştir) üzerinden integre edilecektir, $d\vec{s}$'nin yönü daima dışarı doğru normalin yönü ile aynı alınacaktır. Buradaki problem,

$$\oint \vec{F} \cdot d\vec{s} = \oint \vec{F} \cdot \hat{n} ds$$

yüzey integralini, verilen yüzeyin tamamı üzerinden almaktır. Bu integral, $\vec{F}$ vektörünün kapalı yüzeyden geçen dışa doğru net akısını verir.

Şekil.1.15'deki silindir, üç yüzeye sahiptir. Bu yüzeyler; tavan yüzeyi, taban yüzeyi ve yanal yüzeydir. Böylece,



Şekil.1.15: Örnek-1.7 için silindirik yüzey

$$\oint \vec{F} \cdot d\vec{s} = \oint_{\substack{tavan \\ yüzeyi}} \vec{F} \cdot \hat{n} ds + \oint_{\substack{taban \\ yüzeyi}} \vec{F} \cdot \hat{n} ds + \oint_{\substack{yanal \\ yüzey}} \vec{F} \cdot \hat{n} ds$$

olur. Sağ taraftaki üç integrali ayrı ayrı değerlendirmek gerekir.

a) **Tavan yüzey:** Bu yüzeyde; $z = 3$, $\hat{n} = \hat{z}$

$$\vec{F}.\hat{n} = k_2 z = 3k_2$$

$$ds = rdrd\phi \qquad \text{Denk.(1.52'den)}$$

$$\int_{\substack{tavan\\yüzey}} \vec{F}.\hat{n}ds = \int_0^{2\pi}\int_0^2 3k_2 rdrd\phi = 12\pi k_2$$

dir.

b) **Taban yüzey:** Bu yüzeyde, $z = -3$, $\hat{n} = -\hat{z}$

$$\vec{F}.\hat{n} = -k_2 z = 3k_2$$

$$ds = rdrd\phi$$

$$\int_{\substack{taban\\yüzey}} \vec{F}.\hat{n}ds = 12\pi k_2$$

dir. Görüldüğü gibi; bu sonuç, tavan yüzey üzerinden alınan integral ile aynıdır.

c) **Yanal yüzey:** Bu yüzeyde, $r = 2$, $\hat{n} = \hat{r}$

$$\vec{F}.\hat{n} = \frac{k_1}{r} = \frac{k_1}{2}$$

$$ds = rd\phi dz = 2d\phi dz \quad \text{(Denk.1.52a'dan)}$$

$$\int_{\substack{yanal \\ yüzey}} \vec{F}.\hat{n}ds = \int_{-3}^{3}\int_{0}^{2\pi} k_1 d\phi dz = 12\pi k_1$$

dir. Bu yüzden,

$$\oint \vec{F} \cdot d\vec{s} = 12\pi k_2 + 12\pi k_2 + 12\pi k_1 = 12\pi(k_1 + 2k_2)$$

elde edilir.

****

1.4.3 Küresel Koordinatlar

Küresel koordinatların değişkenleri,

$$(u_1, u_2, u_3) = (R, \theta, \phi)$$

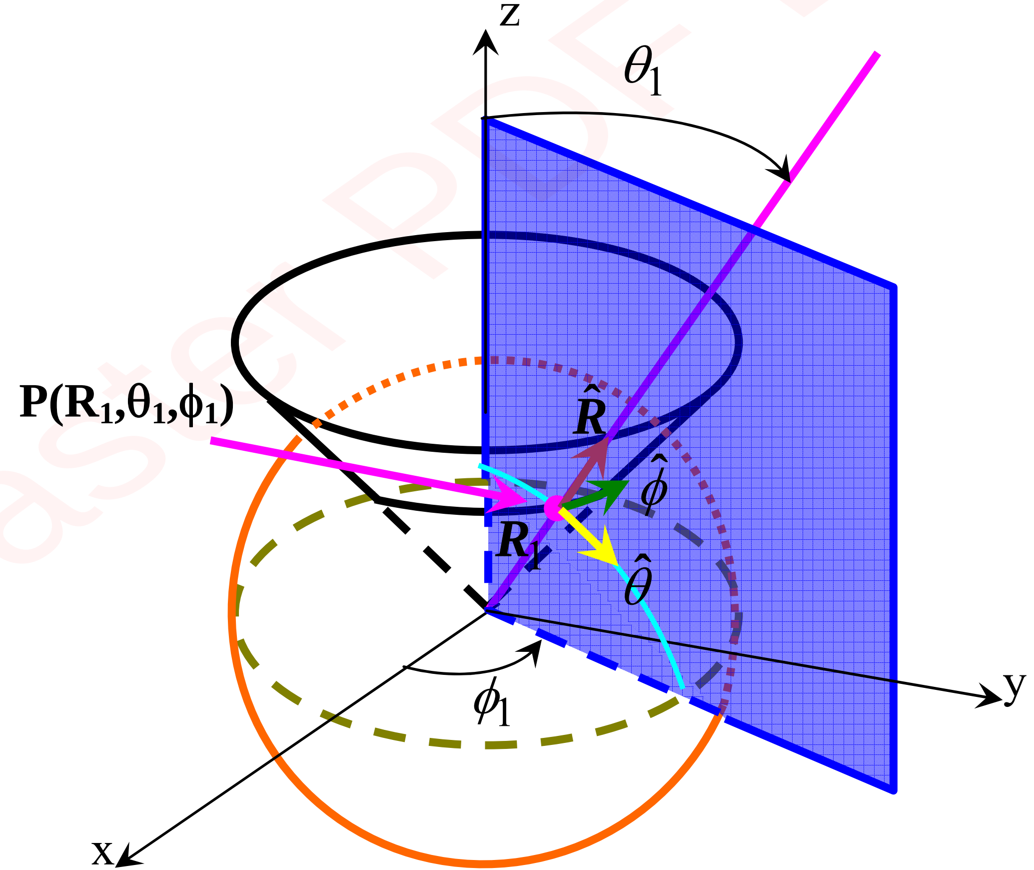
dir. Bu koordinatlarda bir $P(R_1, \theta_1, \phi)$ noktası, aşağıdaki üç yüzeyin kesişme noktası olarak tanımlanır. $R = R_1$ yarıçaplı merkezi orjinde olan küresel bir yüzey, tepesi orjinde olan dik dairesel bir koni, (bu koninin ekseni z-ekseni ile çakışır ve $\theta = \theta_1$' lik bir yarı açıya sahiptir) ve z-eksenini içeren ve xz-düzlemi ile $\phi = \phi_1$ açısı yapan yarı düzlemin kesişme yeri $P(R_1, \theta_1, \phi)$ noktasıdır. P noktasındaki temel vektör $\hat{R}$, orjinden dışarı doğru yönelmiştir (radyal) ve silindirik koordinatlardaki $\hat{r}$'den oldukça farklıdır ve $\hat{r}$, z-eksenine diktir. $\hat{\theta}$ temel vektörü, $\phi = \phi_1$ düzlemindedir ve küresel yüzeye teğettir. Halbuki, $\hat{\phi}$ temel vektörü silindirik koordinatlardaki ile aynıdır. Bunlar, Şekil.1.16'da gösterilmiştir. Bir sağ-el sistemi için,

$$\hat{R} \times \hat{\theta} = \hat{\phi} \qquad (1.64a)$$

$$\hat{\theta}\times\hat{\phi}=\hat{R} \qquad (1.64b)$$

$$\hat{\phi}\times\hat{R}=\hat{\theta} \qquad (1.65c)$$

yazılır. Küresel koordinatlar, noktasal kaynakları ve küresel sınırlı bölgeleri içeren problemler için, önemlidir. Bir gözlemci, sonlu genişlikteki bir kaynak bölgesinden çok uzakta olduğu zaman, kaynağın bulunduğu yer küresel koordinat sisteminin orijini olarak alınabilir ve sonuç olarak uygun yaklaşımlar yapılabilir. Bu, küresel koordinatların uzak alanda anten



Şekil.1.16: Küresel koordinatlar

problemlerini çözmede kullanılmasının sebebidir. Küresel koordinatlardaki bir vektör,

$$\vec{A} = \hat{R}A_R + \hat{\theta}A_\theta + \hat{\phi}A_\phi \qquad (1.65)$$

olarak yazılır. Küresel koordinatlarda, iki vektörün skaler ve vektörel çarpım ifadeleri, Denk.(1.26) ve (1.27)'den elde edilebilir.

Küresel koordinatlarda, **sadece R (u_1) bir uzunluktur**. Diğer iki koordinat θ **ve** ϕ **(u_2 ve u_3) açı değişkenidir**. Şekil.1.17'de tipik bir diferansiyel hacim elemanı gösterilmiş olup, $d\theta$ ve $d\phi$'yi, sırasıyla, dl_2 ve dl_3'e dönüştürmek için, $h_2 = R$ ve $h_3 = R\sin\theta$ metrik katsayılarının gerekli olduğu görülebilir. Bir diferansiyel uzunluk için genel ifade, Denk.(1.31)'den,

$$d\vec{l} = \hat{R}dR + \hat{\theta}Rd\theta + \hat{\phi}R\sin\theta d\phi \qquad (1.66)$$

şeklinde yazılabilir. Üç koordinat yönünde dR, $d\theta$ ve $d\phi$ diferansiyel değişimlerinden oluşan diferansiyel yüzey ve hacim elemanları,

$$d\vec{s}_R = \hat{R}R^2 \sin\theta d\theta d\phi \quad (1.67a)$$

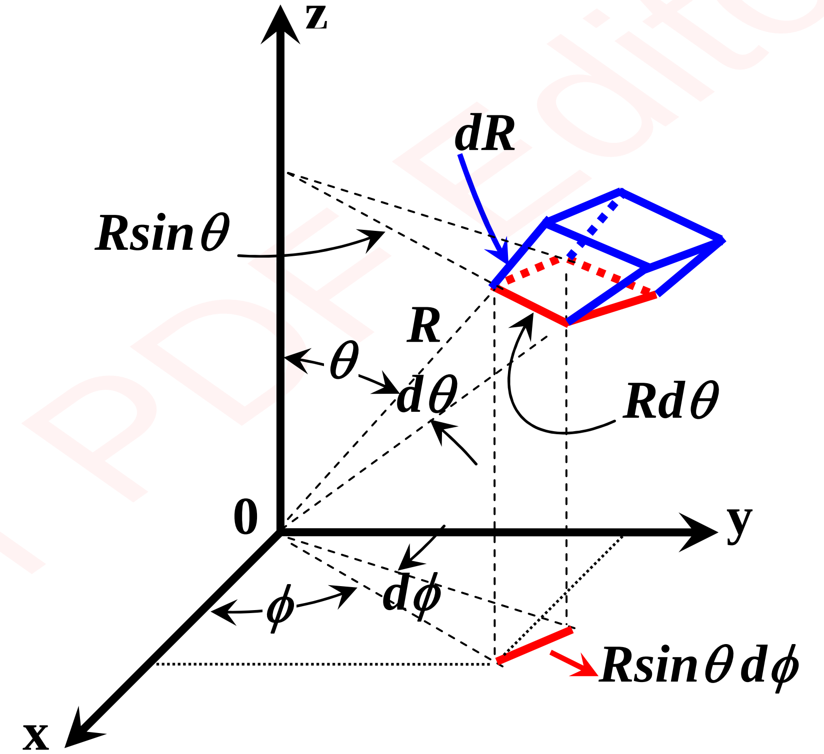
$$d\vec{s}_\theta = \hat{\theta} R \sin\theta dR d\phi \quad (1.67b)$$

$$d\vec{s}_\phi = \hat{\phi} R dR d\theta \quad (1.67c)$$

ve

$$dv = R^2 \sin\theta dR d\theta d\phi \quad (1.68)$$

şeklindedir. Kolaylık bakımından, temel vektörler, metrik katsayılar ve diferansiyel hacim elemanına ait ifadeler, Tablo.1.1'de verilmiştir.



Şekil.1.17: Küresel koordinatlarda diferansiyel hacim elemanı

Küresel koordinatlarda verilen bir vektör, kartezyen veya silindirik koordinatlara (veya tersi) dönüştürülebilir. Şekil.1.17'den,

$$x = R\sin\theta\cos\phi \quad (1.69a)$$

$$y = R\sin\theta\sin\phi \quad (1.69b)$$

$$z = R\cos\theta \qquad (1.69c)$$

yazılabilir. Tersine, kartezyen koordinatlardaki uzunluk elemanları küresel koordinatlara,

$$R = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \qquad (1.70a)$$

$$\theta = \tan^{-1}\frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z} \qquad (1.70b)$$

$$\phi = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) \qquad (1.70c)$$

şeklinde dönüştürülebilir.

****

Örnek.1.8: Küresel koordinatlarda, bir P noktasının konumu $(8,120^0,330^0)$ ile belirtilmiştir. Bu noktanın konumu, **(a)** Kartezyen koordinatlarda, **(b)** Silindirik koordinatlarda belirleyiniz.

****

Tablo 1.1: Üç temel ortogonal koordinat sistemi

Koordinat sistemi Bağıntıları	Kartezyen Koordinatlar (x,y,z)	Silindirik Koordinatlar (r,ϕ,z)	Küresel Koordinatlar (R,θ,ϕ)
Birim vektörler $\hat{u}_1$ $\hat{u}_2$ $\hat{u}_3$	$\hat{x}$ $\hat{y}$ $\hat{z}$	$\hat{r}$ $\hat{\phi}$ $\hat{z}$	$\hat{R}$ $\hat{\theta}$ $\hat{\phi}$
Metrik katsayılar h_1 h_2 h_3	1 1 1	1 r 1	1 R $R\sin\theta$
Diferansiyel Hacim elemanı dv	$dxdydz$	$rdrd\phi dz$	$R^2\sin^2\theta dRd\theta d\phi$

****

Çözüm.1.8: Verilen noktanın küresel koordinatlar $R=8$, $\theta=120^0$ ve $\phi=330^0$ dir.

(a) Kartezyen koordinatlarda: Denk.(1.69a,b,c) kullanılarak,

$$x = 8\sin 120^0 \cos 330^0 = 6$$

$$y = 8\sin 120^0 \sin 330^0 = -2\sqrt{3}$$

$$z = 8\cos 120^0 = -4$$

bulunur. Buradan, P'nin konumu $(6,-2\sqrt{3},-4)$ olur ve yer vektörü (orijinden bu noktaya yönelmiş vektör),

$$\overline{OP} = \hat{x}6 - \hat{y}2\sqrt{3} - \hat{z}4$$

şeklinde yazılabilir.

(b) **Silindirik koordinatlarda:** P noktasının silindirik koordinatları, (a) şıkkında elde edilen sonuçlara Denk.(1.62a,b,c) uygulanarak elde edilebilir. Ancak,

$$r = R\sin\theta \quad (1.71a)$$

$$\phi = \phi \quad (1.71b)$$

$$z = R\cos\theta \quad (1.71c)$$

bağıntıları yardımıyla, verilen küresel koordinatlardan doğrudan hesaplanabilir. Bu bağıntılar, Şekil.1.11 ile Şekil.1.16'nın karşılaştırılması suretiyle, kontrol edilebilir. Böylece, $\boldsymbol{P(4\sqrt{3},330^0,-4)}$ elde edilir. Silindirik koordinatlarda, yer vektörü de,

$$\overline{OP} = \hat{r}4\sqrt{3} - \hat{z}4$$

olur. Burada, kartezyen koordinatların aksine, silindirik koordinatlarda bir noktanın "yer vektörü"nün noktanın konumunu tam olarak belirlemediğini söylemek gerekir. **P noktasının yer vektörünü küresel koordinatlarda yazınız.**

****

Örnek.1.9: $\vec{A} = \hat{R}A_R + \hat{\theta}A_\theta + \hat{\phi}A_\phi$ vektörünü kartezyen koordinatlarda ifade ediniz.

Çözüm.1.9: Bu problemde $\vec{A}$'nın $\vec{A} = \hat{x}A_x + \hat{y}A_y + \hat{z}A_z$ şeklinde yazılması istenmektedir. Bu, daha önceki, bir noktanın koordinatlarının dönüştürülmesi probleminden çok farklıdır. Her şeyden önce, verilen $\vec{A}$ vektörü ifadesinin, ilgilenilen bütün noktalar için geçerli olduğunu ve verilen üç bileşenin hepsinin (A_R, A_θ ve A_ϕ)

koordinat değişkenlerinin fonksiyonu olabileceğini kabul edelim. İkinci olarak; verilen bir noktada, bu üç bileşen kesin nümerik değerlere sahip olacaktır. Ancak, $\vec{A}$'nın yönünü belirleyen bu değerler, genelde, noktanın koordinatlarından tamamen farklı olacaktır. $\vec{A}$'nın $\hat{x}$ ile skaler çarpımı alınarak,

$$A_x = \vec{A}.\hat{x}$$

$$= A_R\hat{R}.\hat{x} + A_\theta\hat{\theta}.\hat{x} + A_\phi\hat{\phi}.\hat{x}$$

elde edilir. $\hat{R}.\hat{x}$, $\hat{\theta}.\hat{x}$ ve $\hat{\phi}.\hat{x}$ skaler çarpımlarının, sırasıyla, $\hat{R}$, $\hat{\theta}$ ve $\hat{\phi}$ birim vektörlerinin $\hat{x}$ yönündeki bileşenlerini verdiği hatırlanarak, Şekil.1.16'dan ve Denk.(1.69a,b,c)'den,

$$\hat{R}.\hat{x} = \sin\theta\cos\phi = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \qquad (1.72)$$

$$\hat{\theta}.\hat{x} = \cos\theta\cos\phi = \frac{xz}{\sqrt{\left(x^2+y^2\right)\left(x^2+y^2+z^2\right)}} \qquad (1.73)$$

$$\hat{\phi}.\hat{x} = -\sin\phi = -\frac{y}{\sqrt{\left(x^2+y^2\right)}} \tag{1.74}$$

bulunur. Böylece,

$$A_x = A_R \sin\theta\cos\phi + A_\theta \cos\theta\cos\phi - A_\phi \sin\phi$$

$$= \frac{A_R x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} + \frac{A_\theta xz}{\sqrt{\left(x^2+y^2\right)\left(x^2+y^2+z^2\right)}} - \frac{A_\phi y}{\sqrt{\left(x^2+y^2\right)}} \tag{1.75}$$

olur. Benzer şekilde,

$$A_y = A_R \sin\theta\sin\phi + A_\theta \cos\theta\sin\phi + A_\phi \cos\phi$$

$$= \frac{A_R y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} + \frac{A_\theta yz}{\sqrt{\left(x^2+y^2\right)\left(x^2+y^2+z^2\right)}} - \frac{A_\phi x}{\sqrt{\left(x^2+y^2\right)}} \tag{1.76}$$

ve

$$A_z = A_R \cos\theta - A_\theta \sin\theta$$

$$= \frac{A_R z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} + \frac{A_\theta \sqrt{\left(x^2+y^2\right)}}{\sqrt{\left(x^2+y^2+z^2\right)}} \qquad (1.77)$$

olur. Eğer A_R, A_θ ve A_ϕ bileşenleri, R, θ ve ϕ'nin bileşeni iseler, bunlar da Denk.(1.70a,b,c) kullanılarak, x, y ve z'nin fonksiyonlarına dönüştürülmelidir. Denk.(1.75), (1.76) ve (1.77) ile verilen bağıntılar, bir koordinat sisteminde basit bir biçimde gösterilebilen bir vektörün başka bir koordinat sisteminde daha karmaşık bir ifade ile verilebildiğini göstermektedir.

****

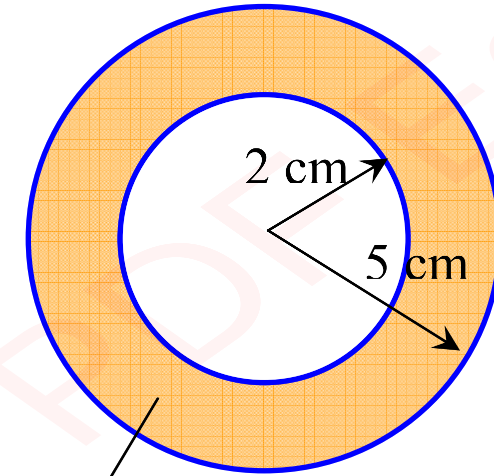
Örnek.1.10: Yarıçapları 2 ve 5cm. olan iki küre arasındaki bölgede, $(-3\times10^{-8}/R^4)\cos^2\phi$ C/m^3'lük yük yoğunluğuna sahip bir elektron bulutu mevcut olsun. Bu bölgede bulunan toplam yük miktarını bulunuz.

Çözüm.1.10: Burada,

$$\rho = -\frac{3\times10^{-8}}{R^4}\cos^2\phi$$

ve

$$Q = \int_V \rho dv$$



dir. Problemde verilen koordinatlar, açıkça, küresel koordinatların kullanılmasını gerektirmektedir. Denk.(1.68)'deki dv eşitliği kullanılarak,

$$Q = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_{0.02}^{0.05} \rho R^2 \sin\theta dR d\theta d\phi$$

yazılabilir. Burada iki husus önemlidir. Birincisi; ρ yük yoğunluğu (C/m^3) olarak verildiğinden, R'ye ait integrasyon sınırları metre boyutuna dönüştürülmelidir. İkincisi; θ'ya ait integrasyon bölgesinin tamamı 0'dan 2π radyana kadar değil, 0'dan π radyana kadar alınmalıdır. Çünkü, bir yarım dairenin z-ekseni etrafında 2π

radyanlık bir açıyı tarayarak döndürülmesi (ϕ, 0'dan 2π'ye kadar) bir küre oluşturur.

Bu durumda,

$$Q = -3\times10^{-8}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_{0.02}^{0.05}\frac{1}{R^2}\cos^2\phi\sin\theta dRd\theta d\phi$$

$$= -3\times10^{-8}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\left(-\frac{1}{0.05}+\frac{1}{0.02}\right)\sin\theta d\theta\cos^2\phi d\phi$$

$$= -0.9\times10^{-6}\int_0^{2\pi}\left(-\cos\theta\Big|_0^{\pi}\cos^2\phi d\phi\right.$$

$$= -1.8\times10^{-6}\left(\frac{\phi}{2}+\frac{\sin 2\phi}{4}\right)\Bigg|_0^{2\pi} = -1.8\pi \quad (\mu C)$$

elde edilir.

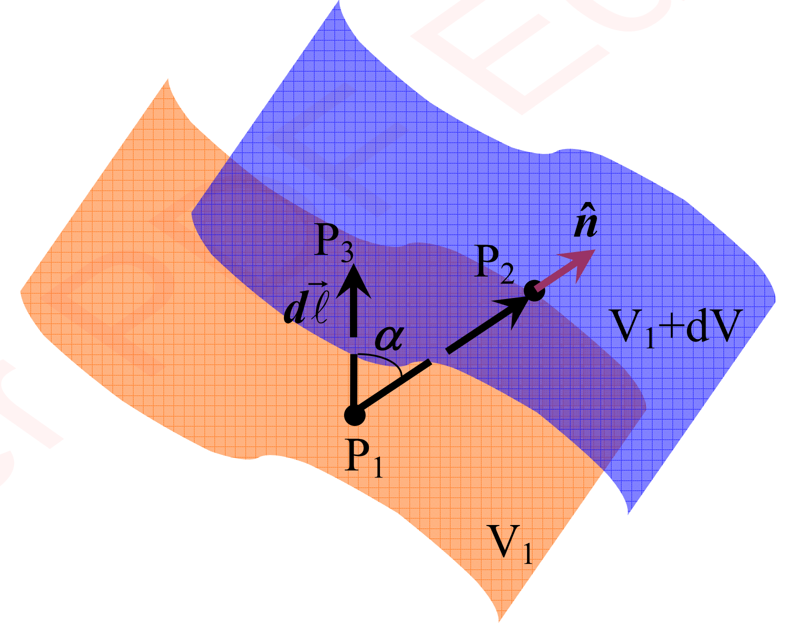
****

1.5 SKALER ALANIN GRADYENTİ

Elektromanyetikte, hem zamana hem de konuma bağlı niceliklerle ilgilenmek zorundayız. Üç boyutlu bir uzayda, üç koordinat değişkeni bulunduğundan, dört değişkenin (t, u_1, u_2, u_3) fonksiyonu olan skaler ve vektörel alanlarla karşılaşma beklentisi vardır. Genel olarak, alanlar, dört değişkenden herhangi biri değiştiğinde, değişebilir. Şimdi, **belirli bir anda skaler bir alanın uzaya bağımlı değişim hızını tanımlama metodu verilecektir**. **Üç uzay koordinatının değişkenlerine göre kısmi türevler bulunur ve değişim hızı farklı yönlerde farklı olabileceğinden, belli bir noktada ve belli bir anda bir skaler alanın uzayın koordinatlarına bağlı olan değişim hızını tanımlamak için bir vektör gereklidir**.

Örneğin; bir **binadaki sıcaklık dağılımını**, **dağlık bir yerin yüksekliğini** veya **bir bölgedeki elektrik potansiyelini** temsil edebilen, uzay koordinatlarının bir skaler fonksiyonu olan V(u_1, u_2, u_3)'yi göz önüne alalım. Genel olarak, **V'nin büyüklüğü noktanın uzaydaki konumuna bağlıdır**, **fakat belli çizgiler veya yüzeyler**

boyunca sabit olabilir. Şekil.1.18, V'nin büyüklüğünün sabit ve sırasıyla, V_1 ile V_1+dV değerlerine sahip olduğu iki yüzeyi göstermektedir. Burada dV, V'deki küçük bir değişimi göstermektedir. Sabit V-yüzeylerinin, özel bir koordinat sistemini tanımlayan yüzeylerin herhangi biriyle çakışması gerekmez. P_1 noktası, V_1 yüzeyi üzerindeki bir nokta; P_2, $d\hat{n}$ normal vektörü boyunca V_1+dV yüzeyi üzerindeki uygun nokta ve P_3, $d\vec{l} \neq d\hat{n}$ olan başka bir vektör boyunca P_2'ye yakın bir noktadır. V'deki aynı dV değişimi için, **uzayın koordinatlarına bağlı değişim hızı** dV/dl, **açıkça** $d\hat{n}$ **boyunca en büyük** değerini alır. Çünkü $d\hat{n}$ **iki yüzey arasındaki en kısa mesafedir**. dV/dl**'nin büyüklüğü,** dl**'nin yönüne bağlı**



Şekil.1.18: Bir skalerin gradyenti ile ilgili şekil

olduğundan, dV/dl **bir yön-bağımlı (doğrultu) türevdir**. **Bir skalerin uzayın koordinatlarına göre maksimum artış hızının hem büyüklüğünü, hem de yönünü temsil eden vektör, o skalerin gradyenti ile tanımlanır**. Buna göre;

$$grad\,V = \hat{n}\frac{dV}{dn} \tag{1.78}$$

yazılabilir. Kısaltma amacıyla, ∇ sembolü ile gösterilen ***del* operatörünü** kullanmak ve gradV yerine ∇V yazmak, gelenek haline gelmiştir. Böylece,

$$\nabla V = \hat{n}\frac{dV}{dn} \tag{1.79}$$

olur. Burada, **dV'nin pozitif (yani V'de bir artış) olduğu kabul edilmiştir**. **Eğer dV negatifse (P_1'den P_2'ye giderken V'de bir azalma varsa),** ∇V**,** $\hat{n}$ **yönünde negatif olacaktır.**

$d\hat{l}$ boyunca doğrultu türevi,

$$\frac{dV}{dl} = \frac{dV}{dn}\frac{dn}{dl} = \frac{dV}{dn}\cos\alpha = \frac{dV}{dn}\hat{n}\cdot\hat{l} = (\nabla V)\cdot\hat{l} \quad (1.80)$$

dir. **Bu denklem; V'nin $\hat{l}$ yönünde uzayın koordinatlarına göre artış hızının, V'nin gradyentinin o yöndeki izdüşümüne (bileşenine) eşit olduğunu belirtmektedir**. Ayrıca Denk.(1.80),

$$dV = (\nabla V)\cdot d\hat{l} \quad (1.81)$$

şeklinde yazılabilir. Burada $d\hat{l} = \hat{l}dl$ dir. Şimdi, Denk.(1.81)'deki dV, konumdaki bir değişimin sonucu olarak (Şekil.1.18'de P_1 'den P_3 'e), V'nin toplam diferansiyeli olur. Bu durumda, koordinatlardaki diferansiyel değişimler cinsinden,

$$dV = \frac{dV}{dl_1}dl_1 + \frac{dV}{dl_2}dl_2 + \frac{dV}{dl_3}dl_3 \quad (1.82)$$

yazılabilir. Burada dl_1, dl_2 ve dl_3 diferansiyel yer değiştirme vektörü $d\vec{l}$ 'nin, seçilen bir koordinat sistemindeki bileşenleridir. Genel ortogonal eğrisel koordinatlar, (u_1, u_2, u_3) cinsinden (Denk.1.31'den),

$$\begin{aligned} d\vec{l} &= \hat{u}_1 dl_1 + \hat{u}_2 dl_2 + \hat{u}_3 dl_3 \\ &= \hat{u}_1(h_1 du_1) + \hat{u}_2(h_2 du_2) + \hat{u}_3(h_3 du_3) \end{aligned} \tag{1.83}$$

yazılabilir. Denk.(1.82)'deki dV, iki vektörün skaler çarpımı olarak,

$$\begin{aligned} dV &= \left(\hat{u}_1 \frac{\partial V}{\partial l_1} + \hat{u}_2 \frac{\partial V}{\partial l_2} + \hat{u}_3 \frac{\partial V}{\partial l_3} \right) . \left(\hat{u}_1 dl_1 + \hat{u}_2 dl_2 + \hat{u}_3 dl_3 \right) \\ &= \left(\hat{u}_1 \frac{\partial V}{\partial l_1} + \hat{u}_2 \frac{\partial V}{\partial l_2} + \hat{u}_3 \frac{\partial V}{\partial l_3} \right) . d\vec{l} \end{aligned} \tag{1.84}$$

şeklinde yazılabilir. Denk.(1.84) ile Denk.(1.81) karşılaştırılırsa,

$$\nabla V = \left(\hat{u}_1 \frac{\partial V}{\partial l_1} + \hat{u}_2 \frac{\partial V}{\partial l_2} + \hat{u}_3 \frac{\partial V}{\partial l_3} \right) \tag{1.85}$$

veya

$$\nabla V = \hat{u}_1 \frac{1}{h_1}\frac{\partial V}{\partial u_1} + \hat{u}_2 \frac{1}{h_2}\frac{\partial V}{\partial u_2} + \hat{u}_3 \frac{1}{h_3}\frac{\partial V}{\partial u_3} \tag{1.86}$$

elde edilir. Denk.(1.86), skalerin uzayın koordinatlarının fonksiyonu olarak verilmesi halinde, bir skalerin gradyentini hesaplamada faydalı bir formüldür.

Kartezyen koordinatlarda, $(u_1, u_2, u_3) = (x, y, z)$ ve $h_1 = h_2 = h_3 = 1$ dir. Bu durumda,

$$\nabla V = \hat{x}\frac{\partial V}{\partial x} + \hat{y}\frac{\partial V}{\partial y} + \hat{z}\frac{\partial V}{\partial z} \tag{1.87}$$

veya

$$\nabla V = \left(\hat{x}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{y}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{z}\frac{\partial}{\partial z} \right) V \tag{1.88}$$

elde edilir. Denk.(1.88)'e göre, ∇ operatörünü kartezyen koordinatlarda bir vektörel diferansiyel operatör olarak gözönüne almak uygundur. Bu durumda,

$$\nabla \equiv \hat{x}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{y}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{z}\frac{\partial}{\partial z} \tag{1.89}$$

olur. Denk.(1.86) gözönüne alınarak, ∇ operatörünün genel ortogonal koordinatlarda,

$$\nabla \equiv \hat{u}_1 \frac{1}{h_1}\frac{\partial}{\partial u_1} + \hat{u}_2 \frac{1}{h_2}\frac{\partial}{\partial u_2} + \hat{u}_3 \frac{1}{h_3}\frac{\partial}{\partial u_3}$$

şeklinde tanımlanabileceği düşünülebilir. Ancak, böyle bir işlemden kaçınılmalıdır. Gerçekten, bu tanımlama bir skalerin gradyenti için doğru cevabı verecektir. Bununla birlikte; aynı ∇ sembolü, bir vektörün bazı diferansiyel işlemlerini (daha sonra incelenecek olan diverjans ve rotasyonel gibi) tanımlamak için, geleneksel olarak kullanıla gelmektedir. Burada, ∇'nın ortogonal koordinatlarda bir operatör olarak açılımı doğru olmayacaktır.

Örnek.1.11: Elektrostatik alan şiddeti $\vec{E}$, bir skaler elektrik potansiyeli V'nin gradyentinin negatifi olarak yazılabilir; yani, $\vec{E} = -\nabla V$ dir. Eğer,

a) $V = V_0 e^{-x} \sin(\frac{\pi y}{4})$

b) $V = V_0 R \cos\theta$ ise, (1, 1, 0) noktasındaki $\vec{E}$'yi belirleyiniz.

Çözüm.1.11:

a) $$\vec{E} = -\left(\hat{x}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{y}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{z}\frac{\partial}{\partial z}\right) V_0 e^{-x} \sin(\frac{\pi y}{4})$$

$$= \left[\hat{x}\sin\left(\frac{\pi y}{4}\right) - \hat{y}\frac{\pi}{4}\cos\left(\frac{\pi y}{4}\right)\right] V_0 e^{-x}$$

dir. Böylece,

$$\vec{E}(1,1,0) = \left[\hat{x} - \hat{y}\frac{\pi}{4}\right]\frac{V_0}{\sqrt{2}e} = \hat{E}E$$

elde edilir. Burada,

$$E = \frac{V_0}{e}\sqrt{\frac{1}{2}\left(1 + \frac{\pi^2}{16}\right)}$$

ve

$$\hat{E} = \frac{1}{\sqrt{1+(\pi^2/16)}}\left[\hat{x} - \hat{y}\frac{\pi}{4}\right]$$

dir.

b) $$\vec{E} = -\left[\hat{R}\frac{\partial}{\partial R} + \hat{\theta}\frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial \theta} + \hat{\phi}\frac{1}{R\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \phi}\right]V_0 R\cos\theta$$

$$= -\left[\hat{R}\cos\theta - \hat{\theta}\sin\theta\right]V_0$$

dir. Denk.(1.77)'ye göre, yukarıdaki sonuç kartezyen koordinatlarda, çok basit olarak, $\vec{E} = -\hat{z}V_0$ şekline dönüştürülebilir. Eğer V ifadesi dikkatli bir şekilde incelenirse, $V_0 R\cos\theta$'nın gerçekten $V_0 z$'ye eşit olduğu görülebilir. Kartezyen koordinatlarda,

$$\vec{E} = -\nabla V = -\hat{z}\frac{\partial}{\partial z}(V_0 z) = -\hat{z}V_0$$ elde edilir.

1.6. BİR VEKTÖREL ALANIN DİVERJANSI

Önceki kısımda, gradyentin tanımını veren, bir skaler alanın uzayın koordinatlarına göre türevleri göz önüne alındı. Şimdi, **bir vektörel alanın uzayın koordinatlarına göre türevlerini ele alacağız**. **Bu işlem, bize, bir vektörün diverjans ve rotasyonelinin tanımını verecektir**. Diverjansın anlamı bu kısımda, rotasyonelin anlamı ise, Bölüm.1.8'de açıklanacaktır. Her iki vektörel işlem de, elektromanyetikte oldukça önemlidir.

Vektörel alanları incelerken, alan değişimlerini, akı çizgileri olarak adlandırılan yönlü alan çizgileri ile grafik olarak temsil etmek uygundur. Bunlar, her vektörel alanın yönünü gösteren yönlü çizgiler veya eğrilerdir. **Alanın bir noktadaki büyüklüğü, noktanın çevresindeki çizgilerin yoğunluğuyla belirtilir**. Başka bir deyişle; **bir vektöre dik birim yüzeyden geçen akı çizgilerinin sayısı, vektörün büyüklüğünün bir ölçüsüdür**. Bir vektörel alanın akısı, su gibi sıkıştırılamayan bir akışkanın akışına benzer. Kapalı bir yüzeyle sınırlanan hacim için, hacim sadece,

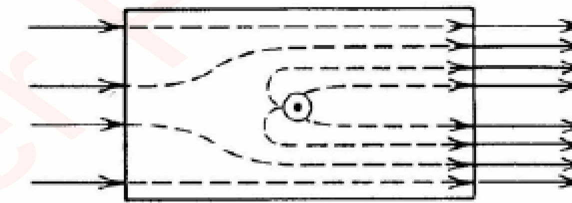
enerji sağlayabilir (kaynak) veya enerji soğuran bir eleman (sink) olduğunda, sırasıyla, yüzeyden dışarı veya içeri doğru bir akış fazlalığı olacaktır. Yani, **pozitif net diverjans hacim elemanında bir akışkan kaynağının varlığını** ve **negatif net diverjans, (enerji soğuran) bir deliğin varlığını gösterir.** Bu yüzden, **birim hacimdeki dışa doğru net akı, bu hacim içindeki kaynağın şiddetinin bir ölçüsü olur.**

Bir noktada bir t vektörünün diverjansı (kısaca, $div\vec{A}$), nokta civarında hacim sıfıra

Akı Girişi = Akı Çıkışı

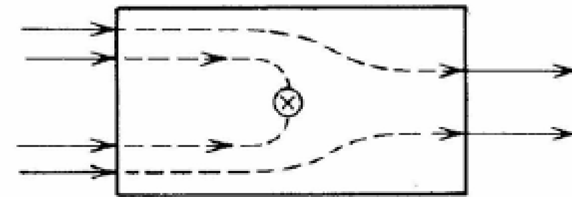


Akı Girişi < Akı Çıkışı



Kaynak

Akı Girişi > Akı Çıkışı

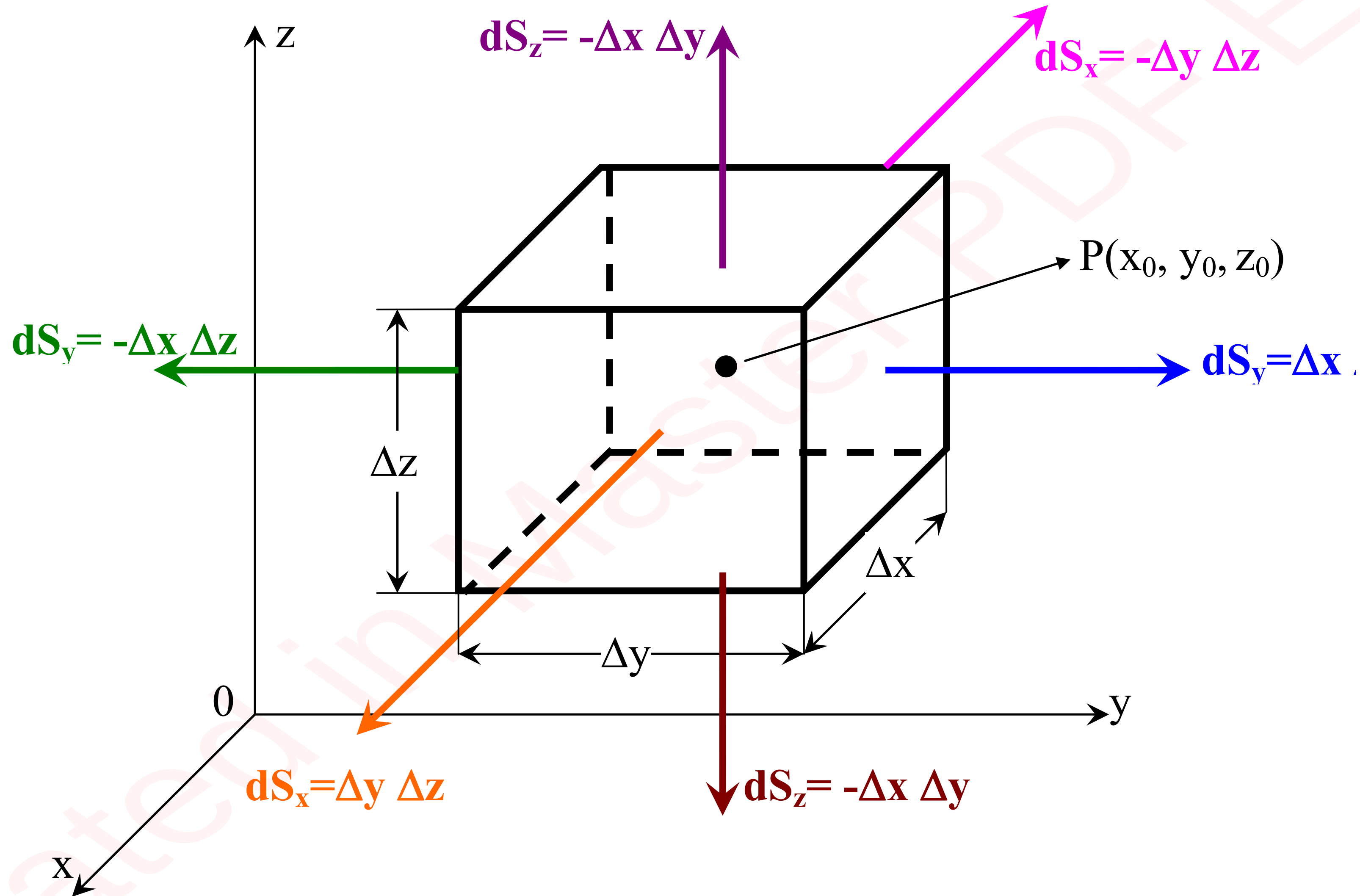


Sink

giderken, birim hacim başına $\vec{A}$'nın net dışarı doğru akısı olarak tanımlanır. Buna göre;

$$div\vec{A} = \lim_{\Delta v \to 0} \frac{\oiint_S \vec{A} \cdot d\vec{s}}{\Delta v} \qquad (1.90)$$

yazılabilir. Dışarı doğru net akıyı temsil eden Denk.(1.90)'nın payı, hacmi sınırlayan bütün S yüzeyi üzerinden alınan bir integraldir. Bu tip bir yüzey integrali, Örnek.1.7'de görülmüştü. Denk.(1.90), büyüklüğü, $\vec{A}$'nın kendisi değiştikçe noktadan noktaya değişebilen skaler bir nicelik olan $div\vec{A}$'nın genel tanımıdır. Bu tanım, herhangi bir koordinat sistemi için geçerlidir. $\vec{A}$ vektörünün ifadesinde olduğu gibi, $div\vec{A}$ ifadesi de, koordinat sisteminin seçimine bağlıdır. Bu kısmın başlangıcında, bir vektörün diverjansının uzayın koordinatlarına göre, türevin bir türü olduğu ima edilmişti. Belki, Denk.(1.90) ile verilen ifadedeki integralin varlığı hakkında şüpheye düşülebilir. Ancak, üç boyutlu bir hacime bölünmüş iki boyutlu bir yüzey integrali, hacim sıfıra yaklaşırken, uzayın koordinatlarına göre, türevleri verir. Şimdi, $div\vec{A}$'nın kartezyen koordinatlardaki ifadesi türetilecektir.



Şekil.1.19: Kartezyen koordinatlarda diferansiyel hacim

Şekil.1.19'da, gösterildiği gibi, bir $\vec{A}$ vektörel alanı içindeki P(x_0, y_0, z_0) noktası civarında merkezlenmiş ve kenarları Δx, Δy ve Δz olan bir diferansiyel hacim elemanını göz önüne alalım. Kartezyen koordinatlarda, $\vec{A} = \hat{x}A_x + \hat{y}A_y + \hat{z}A_z$ dir. Burada, (x_0, y_0, z_0) noktasında $div\vec{A}$'nın belirlenmesi istenmektedir. Diferansiyel hacim elemanı altı yüzeye sahip olduğundan, Denk.(1.90)'nın payındaki yüzey integrali,

$$\oiint_S \vec{A} \cdot d\vec{s} = \left[\iint_{\substack{ön\\yüz}} + \iint_{\substack{arka\\yüz}} + \iint_{\substack{sağ\\yüz}} + \iint_{\substack{sol\\yüz}} + \iint_{\substack{üst\\yüz}} + \iint_{\substack{alt\\yüz}} \right] \vec{A} \cdot d\vec{s} \qquad (1.91)$$

şeklinde yazılabilir. Ön yüz üzerinde,

$$\iint_{\substack{ön\\yüz}} \vec{A} \cdot d\vec{s} = \vec{A}_{\substack{ön\\yüz}} \cdot \Delta\vec{s}_{\substack{ön\\yüz}} = \vec{A}_{\substack{ön\\yüz}} \cdot \hat{x}\Delta y \Delta z = A_x\left(x_0 + \frac{\Delta x}{2}, y_0, z_0\right)\Delta y \Delta z \qquad (1.92)$$

dir. $A_x\left(x_0+\frac{\Delta x}{2},y_0,z_0\right)$, (x_0,y_0,z_0) noktası civarında Taylor serisine açılırsa,

$$A_x\left(x_0+\frac{\Delta x}{2},y_0,z_0\right)=A_x(x_0,y_0,z_0)+\frac{\Delta x}{2}\frac{\partial A_x}{\partial x}\bigg|_{(x_0,y_0,z_0)}+DYMT \tag{1.93}$$

elde edilir. Burada, daha yüksek mertebeli terimler (DYMT), $(\Delta x/2)^2$, $(\Delta x/2)^3$ vb. çarpanları içerir. Benzer şekilde arka yüz üzerinde,

$$\iint\limits_{\substack{arka\\yüz}}\vec{A}\cdot d\vec{s}=\vec{A}_{\substack{arka\\yüz}}\cdot\Delta\vec{s}_{\substack{arka\\yüz}}=\vec{A}_{\substack{arka\\yüz}}\cdot(-\hat{x}\Delta y\Delta z)=-A_x\left(x_0-\frac{\Delta x}{2},y_0,z_0\right)\Delta y\Delta z \tag{1.94}$$

olur. $A_x\left(x_0-\frac{\Delta x}{2},y_0,z_0\right)$'ın Taylor serisine açılımı,

$$A_x\left(x_0-\frac{\Delta x}{2},y_0,z_0\right)=A_x(x_0,y_0,z_0)-\frac{\Delta x}{2}\frac{\partial A_x}{\partial x}\bigg|_{(x_0,y_0,z_0)}+DYMT \tag{1.95}$$

şeklindedir. Denk.(1.93) ile verilen eşitlik Denk.(1.92)'de ve Denk.(1.95) ile verilen eşitlik Denk.(1.94)'de yerine yazılıp, katkılar toplanırsa,

$$\left[\iint\limits_{\substack{ön\\yüz}} + \iint\limits_{\substack{arka\\yüz}}\right]\vec{A}\cdot d\vec{s} = \left(\frac{\partial A_x}{\partial x} + DYMT\right)_{(x_0,y_0,z_0)} \Delta x \Delta y \Delta z \qquad (1.96)$$

elde edilir. Burada, Denk(1.93) ve (1.94)'deki DYMT'den bir Δx çarpanı kadar azaltma yapılmıştır. Fakat Denk(1.96)'daki DYMT'in bütün terimleri hala, Δx'in kuvvetlerini içermektedir.

Aynı işlemler, koordinat değişenlerinin $+\Delta y/2$ ve $-\Delta y/2$ ve $\Delta S = \Delta x \Delta z$ için olduğu sağ ve sol yüzeyler için yapılırsa,

$$\left[\iint\limits_{\substack{sağ\\yüz}} + \iint\limits_{\substack{sol\\yüz}}\right]\vec{A}\cdot d\vec{s} = \left(\frac{\partial A_y}{\partial y} + DYMT\right)_{(x_0,y_0,z_0)} \Delta x \Delta y \Delta z \qquad (1.97)$$

bulunur. Burada DYMT; Δy, $(\Delta y)^2$, vb'ni içerir. Tepe ve alt yüzeyler için,

$$\left[\iint\limits_{\substack{üst\\yüz}} + \iint\limits_{\substack{alt\\yüz}}\right] \vec{A}\cdot d\vec{s} = \left[\frac{\partial A_z}{\partial z} + DYMT\right]_{(x_0,y_0,z_0)} \Delta x \Delta y \Delta z \qquad (1.98)$$

bulunur. Burada DYMT'ler Δz, $(\Delta z)^2$ gibi çarpanları içerir. Şimdi, Denk.(1.96),(1.97) ve (1.98) ile verilen sonuçlar, Denk.(1.91)'de kullanılırsa,

$$\iint\limits_S \vec{A}\cdot d\vec{s} = \left[\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}\right]_{(x_0,y_0,z_0)} \Delta x \Delta y \Delta z + DYMT(\Delta x, \Delta y, \Delta z \text{ cinsinden}) \qquad (1.99)$$

elde edilir. $\Delta V = \Delta x \Delta y \Delta z$ olduğundan, Denk.(1.99)'un Denk.(1.90)'da yerine konması ile, kartezyen koordinatlarda $div\vec{A}$,

$$div\vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \qquad (1.100)$$

şeklinde olur. $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ diferansiyel hacim elemanı sıfıra giderken, DYMT yok olur.

Genel olarak, $div\vec{A}$'nın değeri, hesaplanacağı noktanın konumuna bağlıdır. Denk.(1.100)'de (x_0, y_0, z_0) gösterimi kullanılmamıştır. Çünkü bu denklem, $\vec{A}$'nın ve kısmi türevlerinin tanımlı olduğu herhangi bir noktaya uygulanır.

Kartezyen koordinatlarda, Denk.(1.89) ile tanımlanan del (∇) operatörü ile, Denk.(1.100)'ü $\nabla.\vec{A}$ şeklinde de ifade edebiliriz. Bununla birlikte, $\nabla.\vec{A}$ gösterimi, bütün koordinat sistemlerinde $div\vec{A}$'yı göstermek için, geleneksel olarak kullanılmaktadır. Yani,

$$\nabla.\vec{A} \equiv divA \qquad (1.101)$$

dir. Kartezyen koordinatların dışındaki diğer koordinat sistemlerinde ∇'nın bir operatör değil, sadece bir sembol olduğuna dikkat edilmelidir. Genellikle, Denk. (1.90) ile tanımlanan diverjans, (u_1,u_2,u_3) ortogonal eğrisel koordinatlarda,

$$\nabla.\vec{A} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3}\left[\frac{\partial}{\partial u_1}(h_2 h_3 A_1) + \frac{\partial}{\partial u_2}(h_1 h_3 A_2) + \frac{\partial}{\partial u_3}(h_1 h_2 A_3)\right] \qquad (1.102)$$

şeklinde yazılabilir.

****

Örnek.1.12: Keyfi bir noktanın yer vektörünün diverjansını bulunuz.

Çözüm.1.12: Bu problemin çözümü, kartezyen ve küresel koordinatlarda ayrı ayrı yapılacaktır,

a) *Kartezyen Koordinatlarda:* Keyfi bir (x,y,z) noktasının yer vektörü,

$$OP = \hat{x}x + \hat{y}y + \hat{z}z \qquad (1.103)$$

şeklindedir. Denk.(1.100) ile verilen

$$div\vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

eşitliği kullanılarak,

$$\nabla.(OP) = \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial z} = 3$$

bulunur.

b) Küresel koordinatlarda: Burada yer vektörü,

$$OP = \hat{R}R \tag{1.104}$$

dir. Bunun (R,θ,ϕ) küresel koordinatlardaki diverjansı, Tablo.1.1 kullanılarak, Denk.(1.102) ile verilen

$$\nabla.\vec{A} = \frac{1}{h_1h_2h_3}\left[\frac{\partial}{\partial u_1}(h_2h_3A_1) + \frac{\partial}{\partial u_2}(h_1h_3A_2) + \frac{\partial}{\partial u_3}(h_1h_2A_3)\right]$$

eşitliğinden,

$$\nabla.\vec{A} = \frac{1}{R^2}\frac{\partial}{\partial R}(R^2A_R) + \frac{1}{R\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(A_\theta\sin\theta) + \frac{1}{R\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}(A_\phi) \tag{1.105}$$

şeklinde yazılabilir. Eğer Denk.(1.104), Denk.(1.105)'de kullanılırsa, yine $\nabla\cdot\overrightarrow{OP} = 3$ elde edilir.

****

Örnek.1.13: Çok uzun ve akım taşıyan bir telin dışındaki manyetik akı yoğunluğu $\vec{B}$, çevresel ve telin eksenine olan uzaklıkla ters orantılı olduğuna göre, $\nabla.\vec{\mathbf{B}}$'yi bulunuz.

Çözüm.1.13: Uzun tel, silindirik koordinatların z-ekseni boyunca olsun. Verilen probleme göre;

$$\vec{B} = \hat{\phi}\frac{k}{r}$$

dir. (r,ϕ,z) silindirik koordinatlarda, Denk.(1.102)'den,

$$\nabla.\vec{A} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rA_r) + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \phi}(A_\phi) + \frac{\partial}{\partial z}(A_z) \qquad (1.106)$$

şekline dönüşür. Şimdi, $B_\phi = k/r$ ve $B_r = B_z = 0$ olduğundan, Denk.(1.106)'dan

$$\nabla.\vec{\mathbf{B}} = 0$$

elde edilir. Burada, sabit olmayan, ama diverjansı sıfır olan bir vektör mevcuttur. Bu özellik, manyetik akı çizgilerinin kapalı çizgiler şeklinde olduğunu ve hiçbir manyetik kaynak veya enerji harcayan bir elemanın bulunmadığını gösterir. **Diverjansı sıfır olan bir alan (diverjanssız alan), selenoidal alan olarak adlandırılır**.

****

1.7. DİVERJANS TEOREMİ

Önceki kısımda, **bir vektörel alanın diverjansını, birim hacimden dışarı doğru çıkan net akı olarak tanımlamıştık**. Tahmini olarak; bir vektörel alanın diverjansının integralinin, hacmi sınırlayan yüzeyden geçen vektörün dışarı doğru çıkan toplam akısına eşit olduğu söylenebilir. Yani,

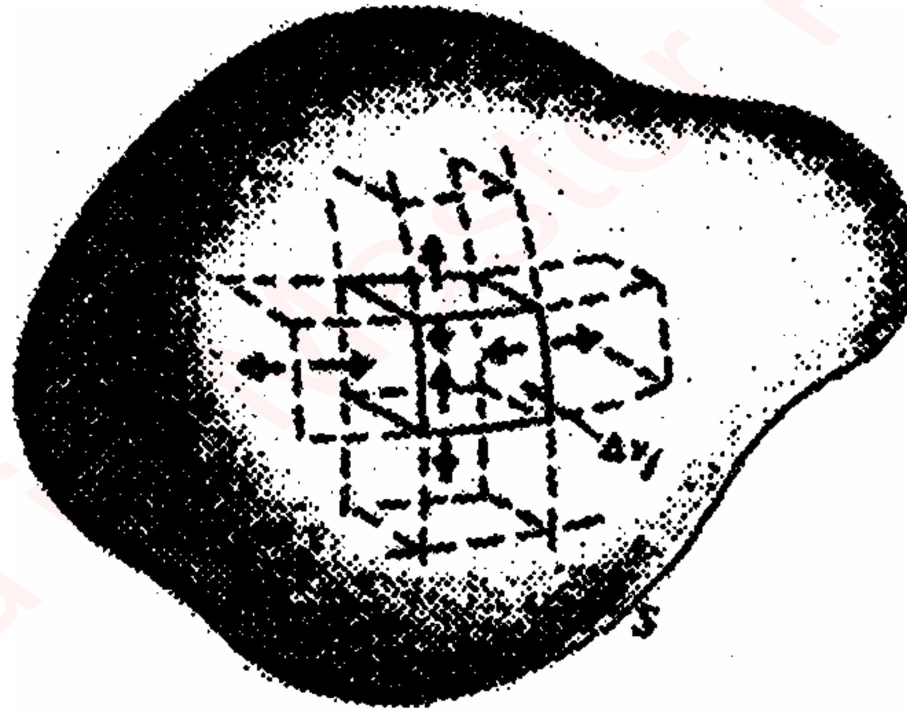
$$\iiint_V \left(\nabla \cdot \vec{A}\right) dv = \oiint_S \vec{A} \cdot d\vec{s} \qquad (1.107)$$

dir. Aşağıda ispatlanacak olan bu özdeşlik, **diverjans teoremi (veya Gauss teoremi)** olarak adlandırılır ve S yüzeyi ile sınırlanmış olan herhangi bir V hacmine uygulanır. $d\vec{s}$'nin yönü daima, ds yüzeyine dik ve hacimden dışarı doğru yönlenmiş yüzey normali ile aynı yöndedir.

S_j gibi bir yüzeyle sınırlanmış çok küçük bir Δv_j diferansiyel hacim elemanı için, Denk.(1.90)'daki $\nabla.\vec{A}$'nın tanımı doğrudan,

$$\left(\nabla \cdot \vec{A}\right)_j \Delta v_j = \oiint_{S_j} \vec{A} \cdot d\vec{s} \tag{1.108}$$

eşitliğini verir. Keyfi bir V hacmi durumunda, bu hacim örneğin N sayıda pek çok Δv_j diferansiyel hacimlerine bölünebilir (bkz. Şekil.1.20). Bütün bu diferansiyel hacimlerin Denk.(1.108)'in her iki tarafına olan katkıları birleştirilirse,



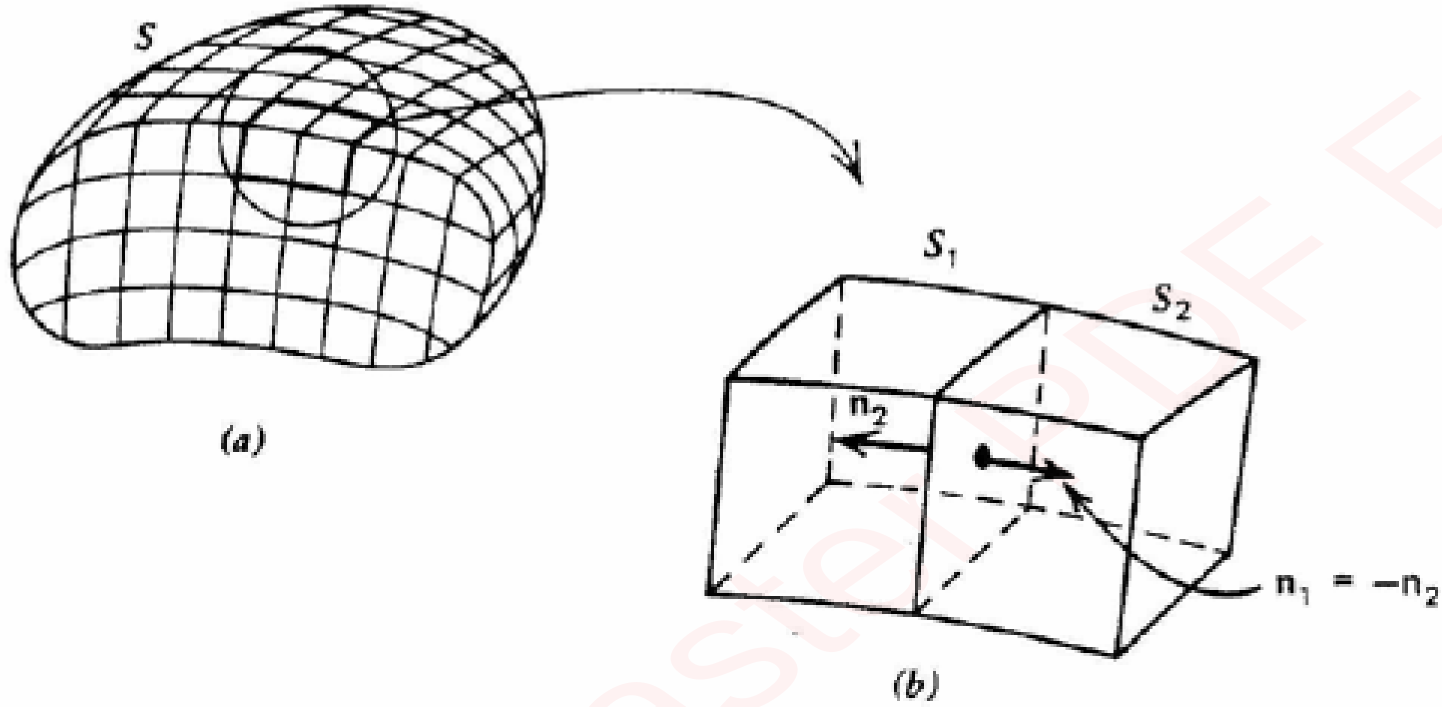
Şekil.1.20: Diverjans teoreminin ispatı için bölünmüş hacimler

$$\lim_{\Delta v_j \to 0}\left[\sum_{j=1}^{N}\left(\nabla\cdot\vec{A}\right)_j \Delta v_j\right] = \lim_{\Delta v_j \to 0}\left[\sum_{j=1}^{N} \oiint_{S_j} \vec{A}\cdot d\vec{s}\right] \qquad (1.109)$$

elde edilir. Denk.(1.109)'un sol tarafı, tanıma göre, $\nabla.\vec{A}$'nın hacim integralidir. Buna göre,

$$\lim_{\Delta v_j \to 0}\left[\sum_{j=1}^{N}\left(\nabla\cdot\vec{A}\right)_j \Delta v_j\right] = \iiint_{V}\left(\nabla\cdot\vec{A}\right)dv \qquad (1.110)$$

yazılabilir. Denk.(1.109)'un sağındaki yüzey integrali, bütün diferansiyel hacim elemanlarının bütün yüzeyi üzerinden toplanır. Bununla beraber, komşu elemanların iç yüzeylerinden gelen katkılar birbirlerini yok ederler. Çünkü, ortak bir iç yüzeyde, komşu elemanların dışa doğru normalleri zıt yönleri gösterirler. Böylece, Denk.(1.109)'un net katkısı sadece, V hacmini sınırlayan dış S yüzeyinin katkısıdır. Yani,



$$\lim_{\Delta v_j \to 0}\left[\sum_{j=1}^{N} \iint_{S_j} \vec{A}\cdot d\vec{s}\right] = \oiint_{S} \vec{A}\cdot d\vec{s} \qquad (1.111)$$

dir. Denk.(1.110) ve (1.111)'in Denk.(1.109)'da kullanılması halinde, Denk.(1.107)' de

$$\iiint_V \left(\nabla \cdot \vec{A}\right) dv = \oiint_S \vec{A} \cdot d\vec{s}$$

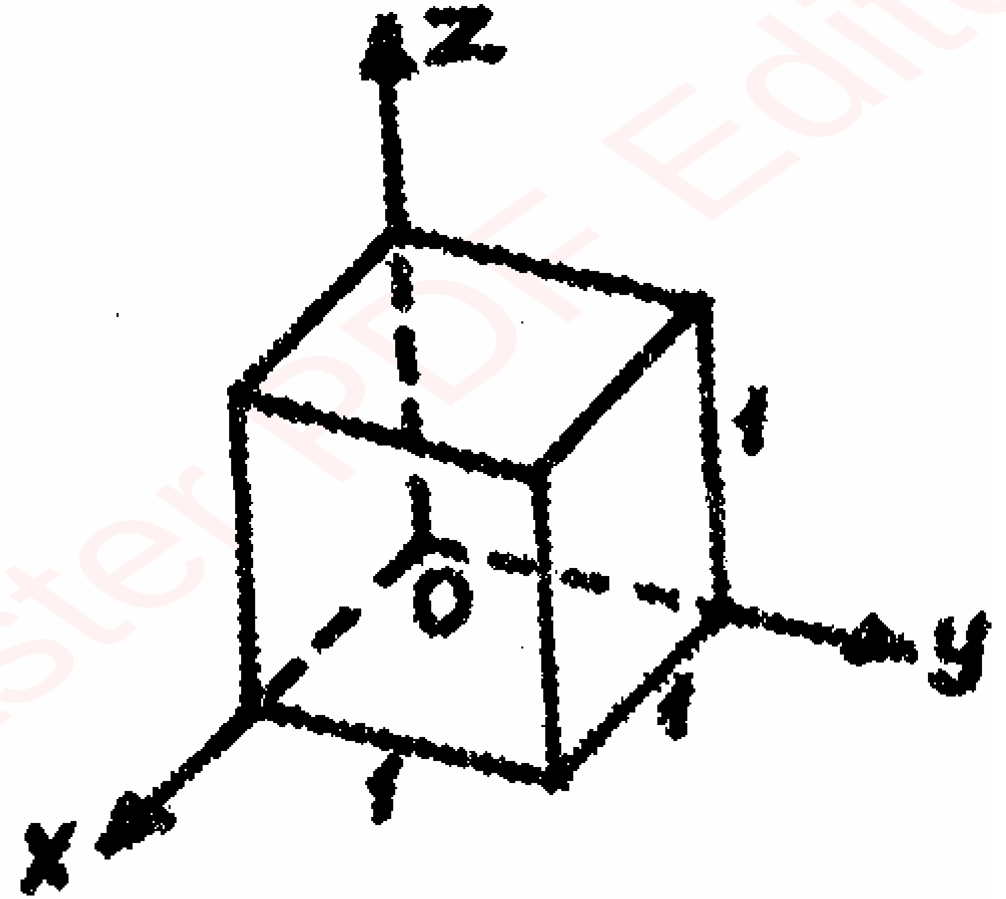
şeklinde verilen diverjans teoremi elde edilir.

Diverjans teoreminin ispatına götüren limit alma işleminin geçerliliği, hem V içinde, hem de S yüzeyi üzerinde $\vec{A}$ vektörel alanının ve birinci türevinin sürekli olmasını gerektirir. Diverjans teoremi vektörel analizde önemli bir özdeşliktir. **Bu teorem, bir vektörün diverjasının hacim integralini, o vektörün kapalı yüzey integraline çevirir (veya tersi).** Diğer teorem ve bağıntıların elde edilmesinde, bu bağıntı sıkça kullanılır. Basitlik amacıyla, Denk.(1.107)'nin her iki tarafında tek bir integral kullanılmasına rağmen, hacim ve yüzey integralleri sırasıyla, üç ve iki katlı integrallerdir.

****

Örnek 1.14: $\vec{A} = \hat{x}x^2 + \hat{y}xy + \hat{z}yz$ olduğuna göre, her kenarı bir birim olan bir küp üzerinde diverjans teoremini ispatlayınız. Küp, bir köşesi orijin olmak üzere, kartezyen koordinatlar sisteminin ilk çeyreğinde bulunmaktadır.

Çözüm 1.14: Şekil.1.21'i göz önüne alalım, önce, altı yüzey üzerinden yüzey integrallerini hesaplayalım.



Şekil.1.21: Örnek 1.14 için birim küp

1.Ön yüz: x=1, $d\vec{s} = \hat{x}dydz$;

$$\iint_{\substack{ön\\yüz}} \vec{A} \cdot d\vec{s} = \int_0^1 \int_0^1 dydz = 1$$

2.Arka yüz: x=0, $d\vec{s} = -\hat{x}dydz$;

$$\iint\limits_{\substack{arka\\ yüz}} \vec{A} \cdot d\vec{s} = 0$$

3.Sol yüz: y=0, $d\vec{s} = -\hat{y}dxdz$;

$$\iint\limits_{\substack{sol\\ yüz}} \vec{A} \cdot d\vec{s} = 0$$

4.Sağ yüz: y=1, $d\vec{s} = \hat{y}dxdz$

$$\iint\limits_{\substack{sağ\\ yüz}} \vec{A} \cdot d\vec{s} = \int_0^1 \int_0^1 xdxdz = \frac{1}{2}$$

5. Üst yüz: z=1, $d\vec{s} = \hat{z}dxdy$;

$$\iint\limits_{\substack{üst\\ yüz}} \vec{A} \cdot d\vec{s} = \int_0^1 \int_0^1 ydxdy = \frac{1}{2}$$

6. Alt yüz: z=0, $d\vec{s} = -\hat{z}dxdy$

$$\iint\limits_{\substack{alt\\ yüz}} \vec{A} \cdot d\vec{s} = 0$$

Yukarıda elde edilen altı değer toplanırsa, $\oiint \vec{A}\cdot d\vec{s} = 1+0+0+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+0 = 2$

bulunur. Böylece $\vec{A}$'nın diverjansı

$$\nabla.\vec{A} = \frac{\partial}{\partial x}(x^2) + \frac{\partial}{\partial y}(xy) + \frac{\partial}{\partial z}(yz) = 3x + y$$

olur. Bu durumda,

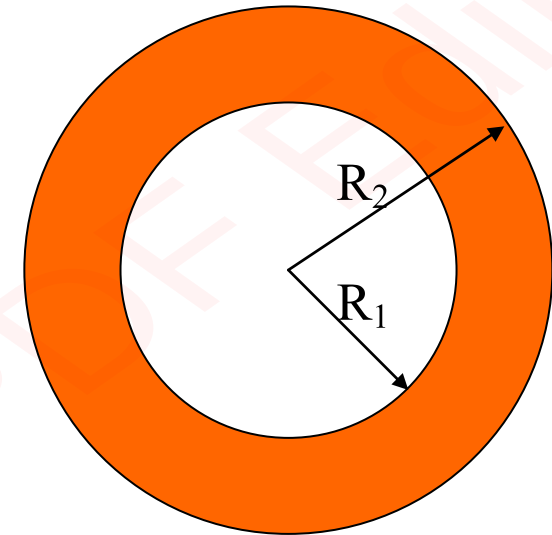
$$\iiint_V \left(\nabla\cdot\vec{A}\right)dv = \int_0^1\int_0^1\int_0^1 (3x+y)\,dxdydz = 2$$

bulunur. Bu da, bir önceki sonuca eşittir.

****

Örnek.1.15: $\vec{F} = \hat{R}kR$ ise, Şekil.1.22'de gösterildiği gibi, $R=R_1$ ve $R = R_2$ $(R_2>R_1)$'deki küresel yüzeylerle oluşturulan kabuk bölgesi için, diverjans teoreminin geçerli olup olmadığını gösteriniz.

Çözüm.1.15: Burada belirlenen bölge, R = R_1 ve R = R_2'de olmak üzere, iki yüzeye sahiptir.



Şekil.1.22: Örnek 1.15 için küresel kabuk

Dış yüzeyde:

R=R_2, $d\vec{s} = \hat{R}R_2^2 \sin\theta d\theta d\phi$,

$$\int_{\substack{dış\\yüzey}} \vec{F}.d\vec{s} = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}(kR_2)R_2^2 \sin\theta d\theta d\phi = 4\pi k R_2^3$$

ve **iç yüzeyde:**

R=R_1, $d\vec{s} = -\hat{R}R_1^2 \sin\theta d\theta d\phi$

$$\int_{\substack{iç\\yüzey}} \vec{F}.d\vec{s} = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}(kR_1)R_1^2 \sin\theta d\theta d\phi = -4\pi k R_1^3$$

dir. Gerçekten, integrand, her iki durumda da θ ve ϕ'den bağımsız olduğundan, bir sabitin küresel bir yüzey üzerinden integrali, basitçe, yüzey alanı ile (dış yüzey için $4\pi R_2^2$, iç yüzey için $4\pi R_1^2$) sabitin çarpımıdır ve hiçbir integrasyon gerekmez. İki sonuç toplanarak,

$$\oiint_S \vec{F} \cdot d\vec{s} = 4\pi k\left(R_2^3 - R_1^3\right)$$

elde edilir. Hacim integralini bulmak, önce, sadece F_R bileşenine sahip olan $\vec{F}$'e ait $\nabla.\vec{F}$,

$$\nabla.\vec{F} = \frac{1}{R^2}\frac{\partial}{\partial R}(R^2 F_R) = \frac{1}{R^2}\frac{\partial}{\partial R}(kR^3) = 3k$$

şeklinde tayin edilir, $\nabla.\vec{F}$ bir sabit olduğundan, bunun hacim integrali, sabitle hacmin çarpımına eşittir. R_1 ve R_2 yarıçaplı iki küresel yüzey arasındaki kabuk bölgesinin hacmi $4\pi(R_2^3 - R_1^3)/3$ dür. Bu yüzden,

$$\iiint_V \left(\nabla \cdot \vec{F}\right) dv = \left(\nabla \cdot \vec{F}\right) V = 4\pi k\left(R_2^3 - R_1^3\right)$$

olur. Bu da, önceki sonuca eşittir. Bu örnek, hacmin enerji harcayan deliklere sahip olması halinde bile, diverjans teoreminin geçerli olduğunu gösterir.

****

1.8 BİR VEKTÖREL ALANIN ROTASYONELİ

Bölüm.1.6'da, **bir $\vec{A}$ vektörünün bir hacmi sınırlayan bir yüzeyden dışarı doğru geçen net akısının bir kaynağın varlığını** gösterdiğini belirtmiştik. **Bu kaynak, akı kaynağı** olarak adlandırılabilir ve **$div\vec{A}$, akı kaynağının şiddetinin bir ölçüsüdür**. Diğer bir kaynak türü ise; kendi etrafında bir vektörel alanın dolanımına (sirkülasyonuna) yol açar ve **girdap (vorteks) kaynağı olarak adlandırılır. Bir vektörel alanın bir kapalı yol etrafındaki net sirkülasyonu (veya kısaca dolanımı) vektörün yol üzerinden skaler çizgi integrali olarak tanımlanır**. Buna göre;

$$\vec{A}\text{'nın C etrafındaki sirkülasyonu} = \oint_C \vec{A} \cdot d\vec{l} \tag{1.112}$$

yazılabilir. Denk.(1.112), matematiksel bir tanımdır. **Sirkülasyonun fiziksel anlamı, $\vec{A}$ vektörünün ne tür bir alanı temsil ettiğine bağlıdır**. **Eğer $\vec{A}$ bir elektrik alan şiddetini temsil ederse, o zaman, daha sonra görüleceği gibi, sirkülasyon**

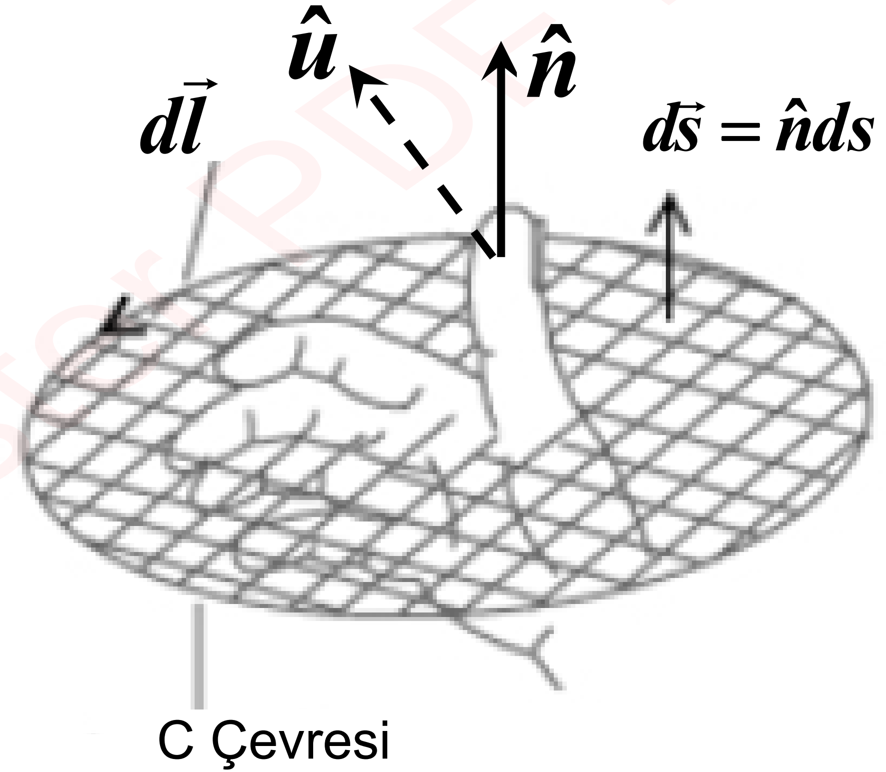
"kapalı bir yol etrafındaki elektromotor kuvveti" olur. $div\vec{A}=0$ olduğunda bile (yani hiçbir akış yokken) $\vec{A}$'nın bir sirkülasyonu olabilir.

Sirkülasyon, Denk.(1.112) 'de tanımlandığı gibi, bir skaler çarpımın çizgi integrali olduğundan, **değeri C çevresinin $\vec{A}$ vektörüne göre yönüne bağlıdır**. Bir girdap kaynağının şiddetinin ölçüsü olan nokta fonksiyonu tanımlamak için, C'nin çok küçük yapılması gerekir. Ayrıca, sirkülasyon maksimum olacak şekilde yönelmelidir. Böylece,

$$\begin{aligned} rot\,\vec{A} &\equiv \nabla \times \vec{A} \\ &= \lim_{\Delta S \to 0} \frac{1}{\Delta S}\left[\hat{n}\oint_C \vec{A}\cdot d\vec{l}\right]_{\max} \end{aligned} \qquad (1.113)$$

yazılabilir. Denk.(1.113)'e göre; bir $\vec{A}$ vektörel alanının rotasyonelinin (rot$\vec{A}$ veya $\nabla\times\vec{A}$ ile gösterilir) büyüklüğü, yüzey alanı sıfıra giderken, birim yüzey alanı başına $\vec{A}$'nın maksimum net sirkülasyonudur. Yönü ise, yüzeyin, net sirkülasyon

maksimum olacak şekilde yönelmesi halinde, yüzeyin normali ile aynı yöndedir. Bir yüzeyin normali, iki zıt yönü gösterebileceğinden, sağ-el kuralına bağlı kalacağız. Bu kurala göre; sağ elin parmakları $d\vec{l}$ yönünde olduğu zaman, baş parmak $\hat{n}$ yönünü gösterir. Bu durum, Şekil.1.23'de gösterilmiştir.



Şekil.1.23: Rotasyonelin tanımında, $\hat{n}$ ile $d\vec{l}$ arasındaki ilişki

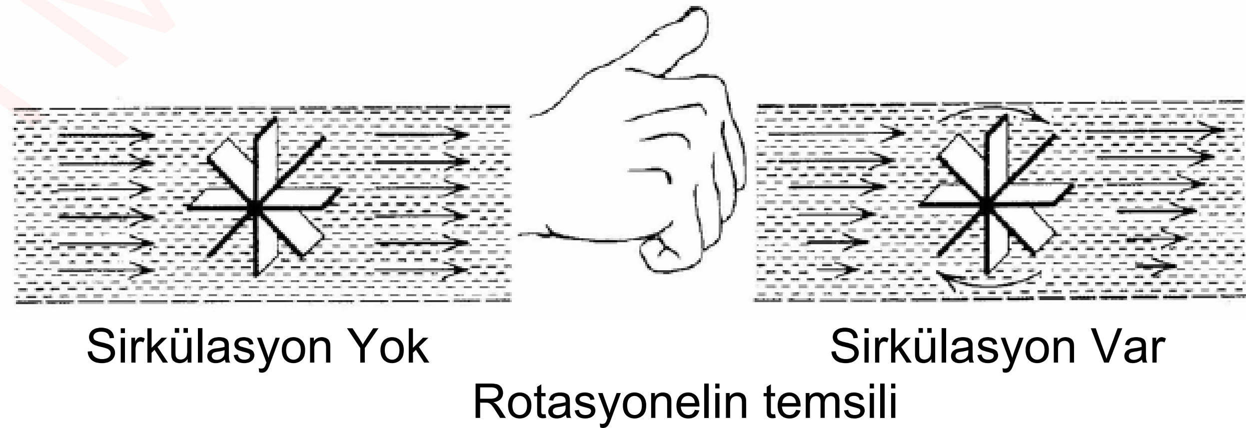
$rot\vec{A}$, bir vektörel nokta fonksiyonudur ve ∇'nın kartezyen koordinatlar dışında bir vektörel operatör olarak göz önüne alınamamasına rağmen, geleneksel olarak, $\nabla \times \vec{A}$ (del vektörel çarpım $\vec{A}$) şeklinde yazılır. $\nabla \times \vec{A}$'nın diğer

herhangi bir u yönündeki bileşeni, $\hat{u}.(\nabla \times \vec{A})$'dır ve yüzey alanı sıfıra yaklaşırken, $\hat{u}$'ya dik birim yüzey alanı başına düşen sirkülasyondan tayin edilebilir. Buna göre;

$$\left(\nabla \times \vec{A}\right)_u = \hat{u} \cdot \left(\nabla \times \vec{A}\right) = \lim_{\Delta S_u \to 0} \frac{1}{\Delta S_u} \left[\oint_{C_u} \vec{A} \cdot d\vec{l} \right] \qquad (1.114)$$

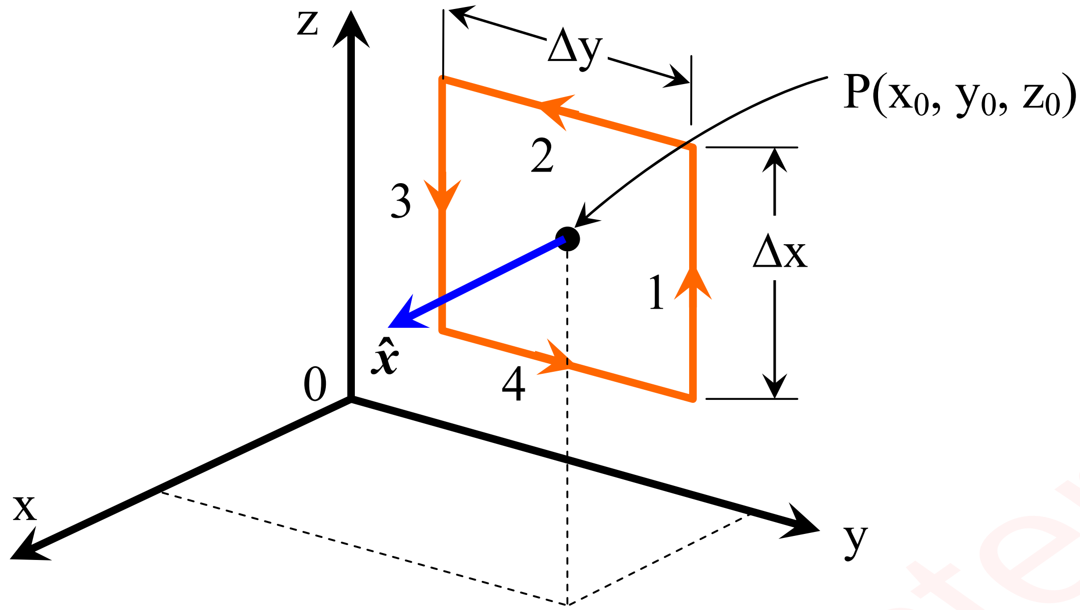
yazılabilir. Burada, ΔS_u yüzeyini sınırlayan C_u çevresinin etrafındaki çizgisel integrasyonun yönü ve $\hat{u}$'nun yönü sağ-el kuralına uyar.

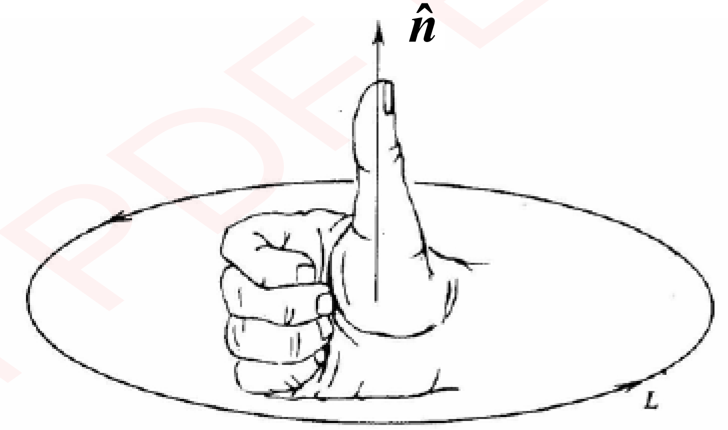
Şimdi, $\nabla \times \vec{A}$'nın kartezyen koordinat!ardaki üç bileşenini bulmak için, Denk.(1.114)'ü kullanabiliriz. Şekil.1.24'ü gözönüne alalım. Burada, tipik bir $P(x_0,y_0,z_0)$ noktası civarında, Δy ve Δz kenarlarına sahip ve yz-düzlemine paralel olan bir diferansiyel dikdörtgen



Sirkülasyon Yok Sirkülasyon Var

Rotasyonelin temsili





Şekil.1.24: $(\nabla \times \vec{A})_x$'in belirlenmesi

yüzey gösterilmiştir. Bu durumda, $\hat{u} = \hat{x}$ ve $\Delta S_u = \Delta y \Delta z$ ve C_u çevresi 1,2,3 ve 4 no'lu dört kenardan oluşmuştur. Böylece,

$$\left(\nabla \times \vec{A}\right)_x = \lim_{\Delta y \Delta z \to 0} \frac{1}{\Delta y \Delta z}\left[\oint_{\substack{1,2,3,4 \\ kenarları}} \vec{A} \cdot d\vec{l}\right] \tag{1.115}$$

yazılabilir. Kartezyen koordinatlarda, $\vec{A} = \hat{x}A_x + \hat{y}A_y + \hat{z}A_z$ dir. Çizgi integraline dört kenarın katkısı aşağıda verilmiştir.

1.Kenar: $d\vec{l} = \hat{z}dz$, $\vec{A}.d\vec{l} = A_z(x_0, y_0 + \frac{\Delta y}{2}, z_0)dz$ dir. Burada,

$$A_z(x_0, y_0 + \frac{\Delta y}{2}, z_0)$$

terimi Taylor serisine açılırsa,

$$A_z(x_0, y_0 + \frac{\Delta y}{2}, z_0) = A_z(x_0, y_0, z_0) + \frac{\Delta y}{2}\frac{\partial A_z}{\partial y}\bigg|_{x_0, y_0, z_0} + DYMT \qquad (1.116)$$

elde edilir. Burada DYMT, $(\Delta y)^2$, $(\Delta y)^3$ vb. terimlerden oluşur. Böylece,

$$\int_{1.kenar} \vec{A}.d\vec{l} = \left[A_z(x_0, y_0, z_0) + \frac{\Delta y}{2}\frac{\partial A_z}{\partial y}\bigg|_{x_0, y_0, z_0} + DYMT \right]\Delta z \qquad (1.117)$$

olur.

3.Kenar: $d\vec{l} = -\hat{z}dz$, $\vec{A}.d\vec{l} = A_z(x_0, y_0 - \frac{\Delta y}{2}, z_0)dz$ dir. Burada,

$$A_z(x_0, y_0 - \frac{\Delta y}{2}, z_0) = A_z(x_0, y_0, z_0) - \frac{\Delta y}{2}\frac{\partial A_z}{\partial y}\bigg|_{x_0, y_0, z_0} + DYMT \quad (1.118)$$

$$\int_{3.kenar} \vec{A}.d\vec{l} = \left[A_z(x_0, y_0, z_0) - \frac{\Delta y}{2}\frac{\partial A_z}{\partial y}\bigg|_{x_0, y_0, z_0} + DYMT\right](-\Delta z) \quad (1.119)$$

olur. $d\vec{l}$ 'nin 1 ve 3 no'lu kenarlar için aynı olduğuna, ancak 3 no'lu kenar üzerinden alınan integralin aşağı doğru (z'de, -Δz değişimi) gidilerek, 1 no'lu integralin yukarı doğru (z'de, Δz değişimi) gidilerek alındığına dikkat edilmelidir. Denk.(1.117) ile (1.119)'un birleştirilmesi halinde,

$$\int_{\substack{1ve3\\kenarları}} \vec{A}.d\vec{l} = \left[\frac{\partial A_z}{\partial y} + DYMT\right]\bigg|_{x_0, y_0, z_0} \Delta y \Delta z \quad (1.120)$$

elde edilir. Denk.(1.120)'deki DYMT'ler hala, Δy'nin kuvvetlerinden oluşur. Benzer şekilde,

$$\int_{\substack{2ve4 \\ kenarları}} \vec{A}.d\vec{l} = \left[-\frac{\partial A_y}{\partial z} + DYMT \right]_{x_0, y_0, z_0} \Delta y \Delta z \quad (1.121)$$

olduğu gösterilebilir. Denk.(1.120) ile (1.121)'in Denk.(1.115)'de yerine konması ve $\Delta y \to 0$ iken DYMT'lerin sıfıra gittiğinin belirtilmesi halinde, $\nabla \times \vec{A}$'nın x-bileşeni,

$$(\nabla \times \vec{A})_x = \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \quad (1.122)$$

şeklinde elde edilir.

Denk(1.122); x, y ve z'deki dönme sırasını gösterir ve $\nabla \times \vec{A}$'nın y ve z bileşenlerinin yazılmasına imkan verir, $\vec{A}$'nın rotasyonelinin kartezyen koordinatlardaki tam ifadesi,

$$\nabla \times \vec{A} = \hat{x}\left[\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right] + \hat{y}\left[\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right] + \hat{z}\left[\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right] \qquad (1.123)$$

şeklinde yazılabilir. Denk.(1.123)'deki $\nabla \times \vec{A}$ ifadesi ile Denk.(1.100)'deki $\nabla . \vec{A}$ ifadesi mukayese edilirse, beklendiği gibi, $\nabla \times \vec{A}$'nın daha karmaşık olduğu görülür. Çünkü $\nabla \times \vec{A}$ üç bileşenli bir vektördür. Halbuki; $\nabla . \vec{A}$ bir skalerdir. Ancak Denk.(1.123), Denk.(1.43) ile verilen ifadeye benzer şekilde, determinant formunda yazılarak kolayca hatırda tutula-bilir. Buna göre;

$$\nabla \times \vec{A} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} \qquad (1.124)$$

yazılabilir.

$\nabla \times \vec{A}$'nın diğer koordinatlardaki ifadesinin türetilmesi için, aynı yol izlenir. Bununla beraber, bu işlem daha uzundur. Çünkü, $\vec{A}.d\vec{l}$ 'nin integrali eğrisel bir dikdörtgenin

karşı kenarları üzerinden alındığından, eğrisel koordinatlarda sadece $\vec{A}$ değil, aynı zamanda $d\vec{l}$ de, büyüklük bakımından değişir. $\nabla\times\vec{A}$'nın genel ortogonal eğrisel koordinatlardaki ifadesi,

$$\nabla\times\vec{A}=\frac{1}{h_1h_2h_3}\begin{vmatrix}\hat{u}_1h_1 & \hat{u}_2h_2 & \hat{u}_3h_3\\ \dfrac{\partial}{\partial u_1} & \dfrac{\partial}{\partial u_2} & \dfrac{\partial}{\partial u_3}\\ h_1A_1 & h_2A_2 & h_3A_3\end{vmatrix} \qquad (1.125)$$

şeklinde yazılabilir. Denk.(1.125)'den açıkça görüldüğü gibi, $\nabla\times\vec{A}$'yı bir vektörel çarpım olarak kabul etmek için, buradaki ∇ sembolü, bir operatör formunda bulunamaz. $\nabla\times\vec{A}$'nın silindirik ve küresel koordinatlardaki ifadeleri, uygun (u_1,u_2,u_3) koordinatları ve (h_1,h_2,h_3) metrik katsayıları kullanılarak, Denk.(1.125)'den kolayca elde edilebilir.

****

Örnek 1.6: Eğer **(a)** Silindirik koordinatlarda,

$$\vec{A} = \hat{\phi}(k / r)$$; k, bir sabit,

veya **(b)** Küresel koordinatlarda, f(R), R radyal mesafesinin herhangi bir fonksiyonu olmak üzere,

$$\vec{A} = \hat{R} f(R)$$

şeklinde verilmişse, $\nabla \times \vec{A} = 0$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm 1.16: (a) Silindirik koordinatlarda;

$$(u_1, u_2, u_3) = (r, \phi, z); \; h_1 = h_3 = 1, \; h_2 = r$$

dir. Denk.(1.125)'den

$$\nabla \times \vec{A} = \frac{1}{r} \begin{vmatrix} \hat{r} & \hat{\phi} r & \hat{z} \\ \dfrac{\partial}{\partial r} & \dfrac{\partial}{\partial \phi} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ A_r & r A_\phi & A_z \end{vmatrix}$$

elde edilir. Verilen $\vec{A}$ için,

$$\nabla \times \vec{A} = \frac{1}{r}\begin{vmatrix} \hat{r} & \hat{\phi} r & \hat{z} \\ \dfrac{\partial}{\partial r} & \dfrac{\partial}{\partial \phi} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ 0 & k & 0 \end{vmatrix} = 0$$

bulunur.

b) Küresel koordinatlarda,

$$(u_1, u_2, u_3) = (R, \theta, \phi); \quad h_1 = 1,\ h_2 = R,\ h_3 = R\sin\theta$$

dir. Böylece,

$$\nabla \times \vec{A} = \frac{1}{R^2 \sin\theta}\begin{vmatrix} \hat{R} & \hat{\theta} R & \hat{\phi} R\sin\theta \\ \dfrac{\partial}{\partial R} & \dfrac{\partial}{\partial \theta} & \dfrac{\partial}{\partial \phi} \\ A_R & RA_\theta & R\sin\theta A_\phi \end{vmatrix} \tag{1.127}$$

yazılabilir. Verilen $\vec{A}$ vektörü için,

$$\nabla \times \vec{A} = \frac{1}{R^2 \sin\theta} \begin{vmatrix} \hat{R} & \hat{\theta} R & \hat{\phi} R \sin\theta \\ \frac{\partial}{\partial R} & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial \phi} \\ f(R) & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

bulunur.

****

Rotasyoneli sıfır olan bir vektörel alana, rotasyonelsiz (irrotasyonel) veya korunumlu alan denir. Gelecek bölümde, **elektrostatik alanın bir rotasyonelsiz (veya korunumlu) alan olduğunu** göreceğiz. Silindirik ve küresel koordinatlar için, sırasıyla, Denk.(1.126) ve (.1.127) 'de verilen $\nabla \times \vec{A}$ ifadeleri, daha sonraki işlemlerde faydalı olacaktır.

1.5 STOKES TEOREMİ

Bir C_j çevresi ile sınırlanmış çok küçük bir ΔS_j diferansiyel alanı için, Denk.(1.113)'de

$$\nabla \times \vec{A} = \lim_{\Delta S \to 0} \frac{1}{\Delta S}\left[\hat{n} \oint_C \vec{A} \cdot d\vec{l}\right]_{max}$$

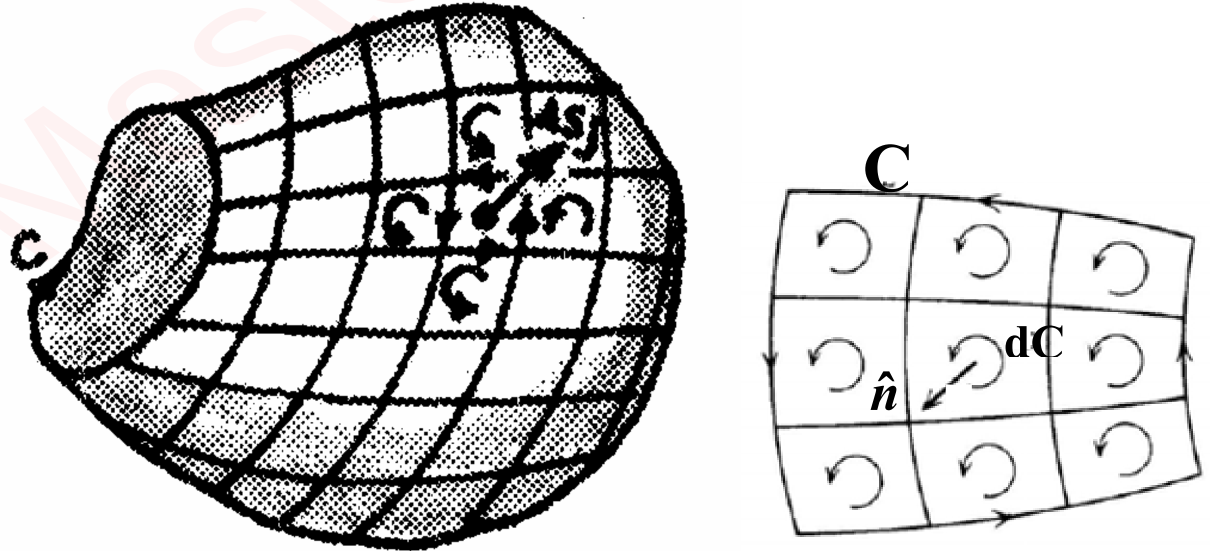
şeklinde verilen $\nabla \times \vec{A}$'nın tanımının her iki tarafının $\hat{n}\Delta S_j$ veya $\Delta \vec{S}_j$ ile skaler çarpımı alınırsa,

$$\left(\nabla \times \vec{A}\right)_j \cdot \left(\Delta S_j\right) = \oint_{C_j} \vec{A} \cdot d\vec{l} \qquad (1.128)$$

yazılabilir. Keyfi bir S yüzeyini, örneğin N sayıda çok küçük diferansiyel alanlara ayırabiliriz. Şekil.1.25, $\Delta \vec{S}_j$ tipik bir diferansiyel eleman olmak üzere, böyle bir işlemi göstermektedir. Denk.(1.128)'in sol tarafı, $\nabla \times \vec{A}$ vektörünün $\Delta \vec{S}_j$ yüzeyinden geçen akısıdır. Bütün diferansiyel yüzeylerin akıya katkıları toplanarak,

$$\lim_{\Delta S_j \to 0} \left[\sum_{j=1}^{N} \left(\nabla \times \vec{A}\right)_j \cdot \left(\Delta S_j\right) \right] = \iint_S \left(\nabla \times \vec{A}\right) \cdot d\vec{s} \tag{1.129}$$

bulunur. Şimdi, Denk.(1.128)'in sağ tarafı ile temsil edilen, bütün diferansiyel elemanların çevrelerinin etrafındaki çizgi integralleri toplanır. İki komşu elemanın çevrelerinin ortak kısmı, iki çevre tarafından zıt yönlerde geçildiğinden, içerdeki bütün ortak parçaların toplam çizgi integraline net katkısı sıfır olur ve sadece, S yüzeyinin tamamını sınırlayan dış C çevresinden gelen katkı (toplamdan sonra) kalır. Buna göre,



Şekil.1.25: Stokes teoreminin ispatı için, alt kısımlara bölünmüş yüzey

$$\lim_{\Delta S_j \to 0} \sum_{j=1}^{N} \oint_{C_j} \vec{A} \cdot d\vec{l} = \oint_{C} \vec{A} \cdot d\vec{l} \qquad (1.130)$$

yazılabilir. Denk.(1.129) ile (1.130) birleştirilerek,

$$\iint_S \left(\nabla \times \vec{A}\right) \cdot d\vec{s} = \oint_C \vec{A} \cdot d\vec{l} \qquad (1.131)$$

şeklindeki **Stokes teoremi** elde edilir. **Bu teorem; bir vektörel alanın rotasyonelinin açık bir yüzey üzerinden yüzey integralinin, vektörün yüzeyi sınırlayan çevre boyunca kapalı çizgi integraline eşit olduğunu ifade eder**. Diverjans teoremindeki gibi, Stokes teoremini veren limit alma işleminin gerekliliği, vektörel alan $\vec{A}$ ve birinci türevinin hem S üzerinde hem de C boyunca mevcut ve sürekli olmasını gerektirir. **Stokes teoremi, bir vektörün rotasyonelinin yüzey integralini vektörün çizgi integraline (ve bunun tersine) dönüştürür**. Diverjans teoremi gibi, Stokes teoremi de, vektörel analizde önemli bir özdeşliktir ve

elektromanyetikteki diğer teorem ve bağıntıların elde edilmesinde sıkça kullanılacaktır.

Eğer $\nabla\times\vec{A}$'nın yüzey integrali, kapalı bir yüzey üzerinden alınırsa, yüzeyi sınırlayan hiçbir dış çevre olmayacaktır ve Denk.(1.131), herhangi bir kapalı S yüzeyi için,

$$\oiint_S \left(\nabla\times\vec{A}\right)\cdot d\vec{s} = 0 \qquad (1.132)$$

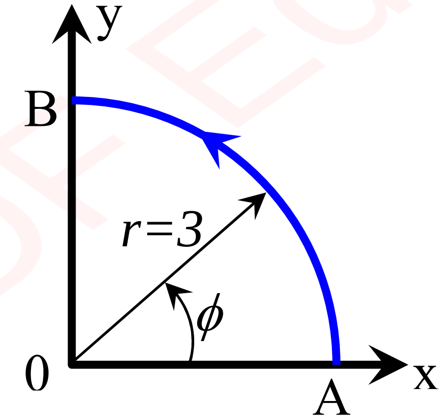
olacağını gösterir. Şekil.1.25'deki geometri, Stokes teoreminin alışılmış olmayan bir uygulamasının daima kenarları açık bir yüzey içereceğini göstermek için seçilmiştir. En basit açık yüzey, çevresi belirli bir düzlem veya disk olabilir. Burada, $d\vec{l}$ ve $d\vec{s}$ $\hat{n}$'nın yönlerinin sağ-el kuralına uygun olduğunu hatırlamak gerekir.

****

Örnek.1.17: $\vec{F} = \hat{x}xy - \hat{y}2x$ olsun. Şekil.1.14'de gösterildiği gibi, ilk çeyrekte bulunan ve 3 birim yarıçaplı çeyrek dairesel disk üzerinde Stokes teoremini ispatlayınız (Örnek 1.6).

Çözüm.1.17: Önce, $\nabla \times \vec{F}$'nin yüzey integralini bulalım. Denk.(1.130)'dan,

$$\nabla \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ xy & -2x & 0 \end{vmatrix} = -\hat{z}(2+x)$$



Şekil.1.14: Örnek 1.6'daki integral yolu

olur. Bu yüzden,

$$\iint_S \left(\nabla \times \vec{F}\right) \cdot d\vec{s} = \int_0^3 \int_0^{\sqrt{9-y^2}} \left(\nabla \times \vec{F}\right) \cdot \hat{z}\, dx dy$$

$$= \int_0^3 \left[\int_0^{\sqrt{9-y^2}} -(2+x).dx \right] dy$$

$$= \int_0^3 \left[2\sqrt{9-y^2} + \frac{1}{2}(9-y^2) \right] dy$$

$$= -\left[y\sqrt{9-y^2} + 9\sin^{-1}\left(\frac{y}{3}\right) + \frac{9}{2}y - \frac{y^3}{6} \right]\Bigg|_0^3$$

$$= -9\left(1 + \frac{\pi}{2}\right)$$

elde edilir. İki integrasyon değişkeni için, uygun sınırları kullanmak önemlidir. İntegrasyon sınırını değiştirerek yine,

$$\iint_S \left(\nabla \times \vec{F}\right) \cdot d\vec{s} = \int_0^3 \left[\int_0^{\sqrt{9-y^2}} -(2+x)\, dy \right] dx$$

sonucunu elde etmek mümkündür. Ancak, eğer hem x, hem de y için, integrasyon bölgesi olarak, 0'dan 3'e kadar olan bölge kullanılırsa, çok yanlış olacaktır.

ABOA etrafındaki çizgi integrali için, Örnek 1.6'da A'dan B'ye kadar olan yay parçası için hesaplama yapılmıştı.

B'den O'ya : x=0 ve $\vec{F}.d\vec{l} = \vec{F}.(\hat{y}dy) = -2xdy = 0$

O'dan A'ya : y=0 ve $\vec{F}.d\vec{l} = \vec{F}.(\hat{x}dx) = xydx = 0$

dır. Bu yüzden Örnek 1.6'dan,

$$\oint_{ABOA} \vec{F}.d\vec{l} = \int_{A}^{B} \vec{F}.d\vec{l} = -9\left(1+\frac{\pi}{2}\right)$$

bulunur. Bu ise, Stokes teoremini doğrulamaktadır. Tabii olarak, Stokes teoremi, Denk.(1.131)'de genel bir özdeşlik olarak kurulmuştur. Bunu ispatlamak için, hiçbir özel örnek kullanmaya gerek yoktur.

****

1.10. SIFIR ÖZDEŞLİKLERİ

Tekrarlı "del" işlemlerini ihtiva eden iki özdeşlik, elektromanyetizmada çalışırken, özellikle potansiyel fonksiyonları gözönüne alındığında, oldukça önemlidir. Bu özdeşlikler aşağıda verilmiştir.

1.10.1. Özdeşlik 1

Birinci özdeşlik,

$$\nabla \times (\nabla V) \equiv 0 \tag{1.133}$$

dır. Buna göre; herhangi bir skaler alanın gradyentinin rotasyoneli sıfıra özdeştir (burada, V'nin ve birinci türevinin mevcut olduğu kabul edilmiştir).

Denk.(1.133), ∇ için Denk.(1.89) kullanılarak ve belirtilen işlemler yapılarak, kartezyen koordinatlarda hemen ispatlanabilir. Genel olarak, $\nabla \times (\nabla V)$'nin yüzey integrali herhangi bir yüzey üzerinden alınırsa, Stokes teoreminin ifade ettiği gibi, ∇V'nin yüzeyi sınırlayan kapalı yol etrafındaki çizgi integraline eşit bir sonuç elde edilir. Buna göre,

$$\iint_S \left[\nabla \times \left(\nabla V\right)\right] \cdot d\vec{s} = \oint_C \left(\nabla V\right) \cdot d\vec{l} \tag{1.134}$$

yazılabilir. Bununla beraber, Denk.(1.81) ile verilen $dV = (\nabla V) \cdot d\hat{l}$ tanımından

$$\oint_C \left(\nabla V\right) \cdot d\vec{l} = \oint_C dV = 0 \tag{1.135}$$

elde edilir. Denk.(1.134) ve (1.135)'in birleştirilmesi, $\nabla \times (\nabla V)$'nin yüzey integralinin herhangi bir yüzey üzerinde sıfır olduğunu gösterir. Bu yüzden, integrandın kendisi, sıfır olmalıdır. Bu ise, Denk.(1.133) ile verilen özdeşliği verir. Türetme işleminde bir koordinat sistemi belirlenmediğinden, özdeşlik geneldir ve koordinat sisteminin seçiminden bağımsızdır.

Özdeşlik 1'e göre; eğer bir vektörel alanın rotasyoneli sıfırsa, o zaman bu alan, skaler bir alanın gradyenti olarak ifade edilebilir. Bir vektörel alan $\vec{E}$ olsun. Bu durumda $\nabla \times \vec{E} = \mathbf{0}$ ise,

$$\vec{E} = -\nabla V \qquad (1.136)$$

olacak şekilde bir skaler V alanı tanımlanabilir. Buradaki negatif işaret, özdeşlik 1 ile ilgilenildiği sürece önemli değildir (bu bağıntı elektrostatikteki elektrik alan şiddeti $\vec{E}$ ile V arasındaki temel bağıntı ile uyumlu olduğundan, ki bu bağıntı gelecek bölümde incelenecektir, negatif işaret kullanılmıştır. Bu safhada, $\vec{E}$ ile V'nin neyi temsil ettiği önemli değildir). Bölüm.1.8'den biliyoruz ki; **rotasyoneli sıfır olan bir vektörel**

alan, korunumlu bir alandır. Bu yüzden, rotasyoneli olmayan (korunumlu) bir vektörel alan her zaman bir skaler alanın gradyenti olarak ifade edilebilir.

1.10.2. Özdeşlik 2

Başka bir sıfır özdeşliği de,

$$\nabla \cdot \left(\nabla \times \vec{A}\right) \equiv 0 \tag{1.137}$$

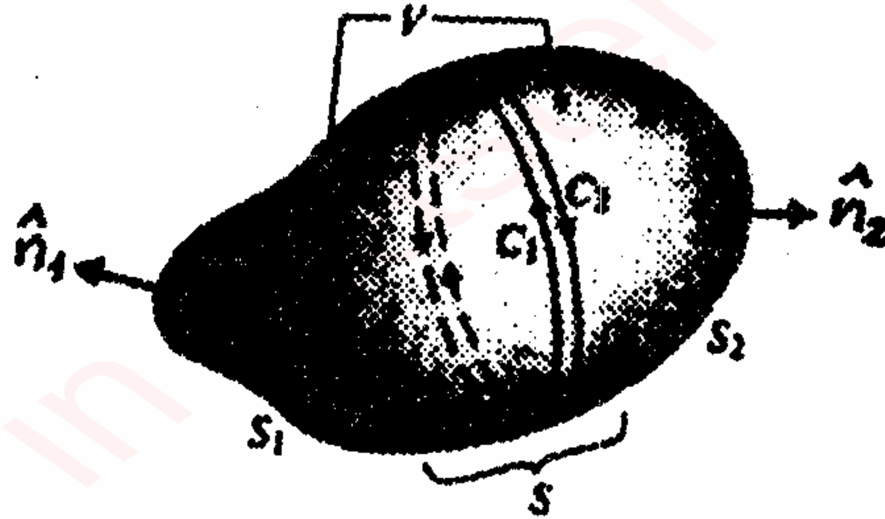
şeklindedir. Bu özdeşliğe göre; herhangi bir vektörel alanın rotasyonelinin diverjansı sıfıra özdeştir. Sol taraftaki) $\nabla \cdot (\nabla \times \vec{A})$'nın hacim integrali alınarak, herhangi bir koordinat sistemini kullanmaksızın, bu denklem ispatlanabilir. Diverjans teoremi uygulanarak,

$$\iiint_V \nabla \cdot \left(\nabla \times \vec{A}\right) dv = \oiint_S \left(\nabla \times \vec{A}\right) \cdot d\vec{s} \tag{1.138}$$

elde edilir. Örneğin, Şekil.1.26'da olduğu gibi bir S yüzeyi ile sınırlanmış keyfi bir V hacmini seçelim. Kapalı S yüzeyi, C_1 ve C_2 olarak iki defa çizilmiş olan ortak bir

sınıra sahip S_1 ve S_2 ile gösterilen iki açık yüzeye bölünebilir. O zaman, Stokes teoremini C_1 ile sınırlı S_2 yüzeyine uygulamak ve Denk.(1.138)'i,

$$\begin{aligned}\oiint_{S}\left(\nabla\times\vec{A}\right)\cdot d\vec{s} &= \oiint_{S_1}\left(\nabla\times\vec{A}\right)\cdot\hat{n}_1 ds+\oiint_{S_2}\left(\nabla\times\vec{A}\right)\cdot\hat{n}_2 ds \\ &= \oint_{C_1}\vec{A}\cdot d\hat{l}+\oint_{C_2}\vec{A}\cdot d\hat{l}\end{aligned} \qquad (1.139)$$



Şekil.1.26: S yüzeyi ile kapatılan keyfi bir V hacmi

şeklinde yazmak mümkündür. S_1 ve S_2 yüzeylerinin $\hat{n}_1$ ve $\hat{n}_2$ normalleri yüzeyden dışarı doğru yönelmiş normalleridir ve bunların C_1 ve C_2'nin yol yönleri ile ilişkileri sağ-el kuralına uygundur. Aslında, C_1 ve C_2 çevreleri birdir ve S_1 ile S_2 arasındaki ortak sınır aynı olduğundan, Denk.(1.139)'un sağ tarafındaki iki çizgi integrali, aynı yolu zıt yönlerde geçmektedir. Bu yüzden, onların toplamları ve Denk.(1.138)'in sağındaki $\nabla.(\nabla\times\vec{A})$'nın hacim integrali sıfır olur. Bu durum, keyfi bir hacim elemanı için doğru olduğundan, Denk.(1.137)'deki özdeşlikle belirtildiği gibi, integrandın kendisi de sıfır olmalıdır.

Özdeşlik 2'ye göre; eğer bir vektörel alan diverjanssız ise, o alan başka bir vektörel alanın rotasyoneli olarak ifade edilebilir. $\vec{B}$ bir vektörel alan olsun. Yukarıdaki sonuçtan, eğer $\nabla.\vec{B}=0$ ise,

$$\vec{B}=\nabla\times\vec{A} \tag{1.140}$$

olacak şekilde bir $\vec{A}$ vektörel alanı tanımlanabilir. Bölüm.1.6'da, diverjansı sıfır olan bir alanın selenoidal bir alan olarak tanımlandığını belirtmiştik. Selenoidal alanlar,

enerji sağlayan akı kaynakları veya enerji harcayan deliklerle ilgili değildir. Bir selenoidal alanın herhangi bir kapalı yüzeyden dışarı doğru net akısı sıfırdır ve akı çizgileri kapalı formdadır. Bir selenoidin veya bir indüktörün magnetik akı çizgileri buna bir örnektir.

1.11. HELMHOLTZ TEOREMİ

Önceki kısımlarda, **diverjanssız bir alanın selenoidal** ve **rotasyonelsiz bir alanın irrotasyonel** olduklarını belirtmiştik. Vektörel alanları, onların selenoidal ve/veya irrotasyonel olmasına göre, sınıflandırılabilir. Bir vektörel $\vec{F}$ alanı,

1. Eğer,

$$\nabla . \vec{F} = 0 \text{ ve } \nabla \times \vec{F} = 0$$

ise, selenoidal ve irrotasyoneldir. **Yüksüz bir bölgedeki statik elektrik alan buna bir örnektir.**

2. Eğer,

$$\nabla . \vec{F} = 0 \text{ ve } \nabla \times \vec{F} \neq 0$$

ise, alan selenoidaldır, fakat irrotasyonel değildir. **Akım taşıyan bir iletkendeki kararlı manyetik alan buna bir örnektir**.

3. Eğer,

$$\nabla.\vec{F} \neq 0 \text{ ve } \nabla \times \vec{F} = 0$$

ise, alan irrotasyoneldir, fakat selenoidal değildir. **Yüklü bir bölgedeki statik elektrik alan buna bir örnektir.**

4. Eğer,

$$\nabla.\vec{F} \neq 0 \text{ ve } \nabla \times \vec{F} \neq 0$$

ise, alan ne selenoidal, ne de irrotasyoneldir. **Zamanla değişen manyetik alanın bulunduğu yüklü bir ortamdaki elektrik alan buna örnektir**.

Bu durumda, en genel vektörel alan hem sıfırdan farklı bir diverjansa, hem de sıfırdan farklı bir rotasyonele sahiptir ve selenoidal bir alanla irrotasyonel bir alanın toplamı olarak gözönüne alınabilir.

Helmholtz Teoremine göre; bir vektörel alan (vektörel nokta fonksiyon), eğer diverjansı ve rotasyoneli her yerde biliniyorsa, bir sabit farkıyla belirlenir. Sınırsız bir bölgede, vektörel alanın hem diverjansının, hem de rotasyonelinin sonsuzda sıfıra gideceği kabul edilir. Eğer vektörel alan, bir yüzeyle sınırlı bir bölge içine hapsedilmişse, o zaman, vektörün sınırlayıcı yüzey üzerindeki normal bileşeni ile birlikte, bölge boyunca diverjansı ve rotasyoneli verilirse, bu vektörel alan belirlenebilir. Burada vektörel fonksiyonun tek-değerli ve türevlerinin sonlu ve sürekli oldukları kabul edilmiştir.

Helmholtz teoremi, matematiksel bir teorem olarak, genel anlamda, ispatlanabilir. **Amacımıza uygun olarak; bir vektörün diverjansının, akı kaynağının ve bir vektörün rotasyonelinin, girdap kaynağının bir ölçüsü olduğunu bilmemiz yeterlidir.** Hem akı kaynağının, hem de girdap kaynağının şiddetleri bilindiği zaman, vektörel alanın belirlenebileceği ümit edilmektedir. Böylece, genel bir $\vec{F}$

vektörel alanını, $\vec{F}_i$ gibi bir irrotasyonel kısım ve $\vec{F}_s$ gibi bir selenoidal kısım olmak üzere, iki kısma ayırmak mümkündür. Yani,

$$\vec{F} = \vec{F}_i + \vec{F}_S \tag{1.141}$$

yazılabilir. Burada,

$$\nabla \times \vec{F}_i = 0 \tag{1.142a}$$

$$\nabla . \vec{F}_i = g \tag{1.142b}$$

ve

$$\nabla . \vec{F}_s = 0 \tag{1.143a}$$

$$\nabla \times \vec{F}_s = \vec{G} \tag{1.143b}$$

dir ve g ve $\vec{G}$'lerin verileceği kabul edilmiştir. Buradan,

$$\nabla . \vec{F} = \nabla . \vec{F}_i = g \tag{1.144}$$

ve

$$\nabla \times \vec{F} = \nabla \times \vec{F}_s = \vec{G} \tag{1.145}$$

elde edilir. Helmholtz teoremi, g ve $\vec{G}$ belirlendiği zaman, $\vec{F}$ vektörel fonksiyonunun tayin edilebileceğini gösterir. $\nabla\bullet$ ve $\nabla\times$, farklı operatörler olduğundan, $\vec{F}$, g ve $\vec{G}$'yi integre ederek elde etmek gerekir. Bu integrasyon işlemleri sonunda, integrasyon sabitleri ortaya çıkar. Bu ilave sabitlerin tayini, bazı sınır şartlarının bilinmesini gerektirir. Verilen g ve $\vec{G}$'den $\vec{F}$'nin bulunmasına ait işlem, şimdilik açık değildir, daha sonra gösterilecektir.

$\vec{F}_i$'nin irrotasyonel olması gerçeği, Denk.(1.133)'e göre, V gibi bir skaler fonksiyonun tanımlanmasına imkan sağlar. Yani,

$$\vec{F}_i = -\nabla V \tag{1.146}$$

olur. Benzer şekilde, Denk.(1.137)'deki özdeşlik ve Denk.(1.143a),

$$\vec{F}_s = \nabla \times \vec{A} \tag{1.147}$$

şeklinde, $\vec{A}$ gibi bir vektörel (potansiyel) fonksiyonunun tanımlanmasına imkan verir. **Helmholtz teoremi, genel bir $\vec{F}$ vektörel fonksiyonunun, bir skaler**

fonksiyonun gradyenti ile bir vektörel fonksiyonun rotasyonelinin toplamı olarak yazılabileceğini ifade eder. Böylece,

$$\vec{F} = -\nabla V + \nabla \times \vec{A} \tag{1.148}$$

yazılabilir.

Daha sonraki bölümlerde; elektromanyetizmanın aksiyom denklemleri geliştirilirken, Helmholtz teoremi esas alınacaktır.

****

Örnek 1.18: $\vec{F}$ vektörel fonksiyonu,

$$\vec{F} = \hat{x}(3y - c_1 z) + \hat{y}(c_2 x - 2z) - \hat{z}(c_3 y + z)$$

olsun.

a) Eğer $\vec{F}$ irrotasyonelse; c_1, c_2 ve c_3 sabitlerini belirleyiniz.

b) Negatif gradyenti $\vec{F}$'ye eşit olan skaler V potansiyelini tayin ediniz.

Çözüm 1.18:

a) $\vec{F}$'nin irrotasyonel olması için, $\nabla \times \vec{F} = \mathbf{0}$, yani,

$$\nabla \times \vec{A} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ (3y - c_1 z) & (c_2 x - 2z) & -(c_3 y + z) \end{vmatrix}$$

$$= \hat{x}(-c_3 + 2) - \hat{y}c_1 + \hat{z}(c_2 - 3) = 0$$

olur. $\nabla \times \vec{F}$'nin her bileşeni sıfır olmalıdır. Buradan, $c_1=0$, $c_2=3$ ve $c_3=2$ bulunur.

b) $\vec{F}$ irrotasyonel olduğundan, skaler V fonksiyonunun negatif gradyenti olarak ifade edilebilir yani,

$$\vec{F} = -\nabla V = -\hat{x}\frac{\partial V}{\partial x} - \hat{y}\frac{\partial V}{\partial y} - \hat{z}\frac{\partial V}{\partial z}$$

$$= -\hat{x}3y + \hat{y}(3x - 2z) - \hat{z}(2y + z)$$

bulunur. Buna göre,

$$\frac{\partial V}{\partial x} = -3y \tag{1.149}$$

$$\frac{\partial V}{\partial y} = -3x + 2z \tag{1.150}$$

$$\frac{\partial V}{\partial z} = 2y + z \tag{1.151}$$

yazılabilir. Denk.(1.149)'a x'e göre kısmi integrasyon uygulanırsa,

$$V = -3xy + f_1(y,z) \tag{1.152}$$

elde edilir. Burada $f_1(y,z)$, y ve z'nin belirlenecek olan fonksiyonudur. Benzer şekilde, Denk(1.150) y'ye göre ve Denk.(1.151) z'ye göre integre edilerek,

$$V = -3xy + 2yz + f_2(x,z) \tag{1.153}$$

ve

$$V = 2yz + \frac{z^2}{2} + f_3(x,y) \tag{1.154}$$

bulunur. Denk.(1.152), (1.153) ve (1.154)'ün incelenmesi,

$$V = -3xy + 2yz + \frac{z^2}{2} \tag{1.155}$$

şeklinde bir skaler potansiyel fonksiyonunun yazılmasına imkan sağlar. Denk.(1.155)'e herhangi bir sabitin eklenmesi, V'yi yine bir cevap yapar. Bu sabit, bir sınır şartından veya sonsuzdaki durumdan belirlenecektir.

****

BÖLÜM 2

ELEKTROSTATİK ALANLAR

2.1. GİRİŞ

Bilimsel çalışmalarda, tümden gelim teorisine göre; temel büyüklüklerin tanımlanması, çalışma şartlarının belirlenmesi ve temel bağıntıların ortaya konulması gerekir. Elektromanyetik model için, vektörel analizin temelleri Bölüm.1'de verildi. Bu nedenle şimdi, elektrostatiğin kaynak-alan bağıntılarını incelemek için gerekli temel ifadeler kullanıma hazırdır. Elektrostatikte, elektrik yükleri (kaynaklar) durgundur (hareketsizdir) ve elektrik alanlar zamana göre değişmez. Bu durumda, manyetik alan mevcut olmayacağından, nispeten basit bir durumla ilgileneceğiz. Bu bölümde, elektrostatik alanların davranışı incelenecek ve elektrostatik problemlerin çözüm teknikleri verilecektir.

Elemanter fizikte, elektrostatik konusuna, iki noktasal yük arasındaki kuvveti tanımlayan deneysel **Coulomb kanunu** (1785'de formüle edildi) ile başlanır.

Coulomb kanununa göre; **q_1 ve q_2 gibi iki yüklü parçacık arasındaki kuvvet, yüklerin çarpımı ile doğru, yükler arasındaki uzaklığın karesi ile ters orantılıdır. Bu kuvvetin yönü ise, yükleri birleştiren doğru boyuncadır.** Bunlardan başka, Coulomb, ters işaretli yüklerin birbirini çektiğini, aynı işaretli yüklerin birbirini ittiğini göstermiştir. Vektörel gösterimle, Coulomb kanunu, matematiksel olarak,

$$\vec{F}_{12} = \hat{R}_{12} k \frac{q_1 q_2}{R_{12}^2} \tag{2.1}$$

şeklinde yazılabilir. Burada $\vec{F}_{12}$, q_1 yükü tarafından q_2 yüküne uygulanan kuvvet, $\hat{R}_{12}$ q_1'den q_2'ye doğru yönelmiş birim vektör ve k, birim sistemi ve ortama bağlı olan bir orantı sabitidir. Eğer, **yükler aynı işaretli ise $\vec{F}_{12}$ pozitif (itici) ve yükler ters işaretli ise, $\vec{F}_{12}$ negatif (çekici)'dir.**

2.2. SERBEST UZAYDA ELEKTROSTATİĞİN TEMEL DENKLEMLERİ

Elektromanyetik konusuna, serbest uzaydaki statik elektrik yüklerinin meydana getirdiği elektrik alan ile başlamak gelenek haline gelmiştir. Serbest uzaydaki elektrostatik alanlar, elektromanyetiğin en basit durumudur. Bu bölümde, elektromanyetiğin temel vektörel büyüklükleri olan **elektrik alan şiddeti ($\vec{E}$)**, **elektrik akı yoğunluğu (veya elektrik deplasmanı) ($\vec{D}$)**, **manyetik akı yoğunluğu ($\vec{B}$) ve manyetik alan şiddeti ($\vec{H}$)**'den sadece elektrik alan şiddeti incelenecektir. Bundan başka; bu vektörel büyüklüklere ilave olarak, elektromanyetik modelde üç sabit vardır. Bu sabitler, **elektromanyetik dalgaların serbest uzaydaki hızı (c), serbest uzayın dielektrik geçirgenliği (ε_0) ve manyetik geçirgenliği (μ_0)'dir**. Ancak, bu bölümdeki formülasyona sadece ε_0 girecektir.

Birim test yükü başına düşen kuvvet elektrik alan olarak tanımlanır. Yani,

$$\vec{E} = \lim_{q \to 0} \frac{\vec{F}}{q} \quad \text{(V/m=N/C)} \qquad (2.2)$$

yazılabilir. Burada, **q test yükü, pratik olarak sıfır olamaz. Zaten, test yükü bir elektron yükünden küçük olamaz**. Ancak, test yükü, kaynağın yük dağılımını bozmayacak kadar küçükse, test yükünün sonlu olması, ölçülen elektrik alan ile hesaplanan değer arasında önemli bir farklılık oluşturmaz. Denk.(2.2)'nin tersi, $\vec{E}$ alanı içindeki durgun q yüküne etkiyen,

$$\vec{F} = q\vec{E} \quad \text{(N)} \tag{2.3}$$

kuvvetini verir. **Serbest uzayda elektrostatik alanın temel denklemleri,**

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \tag{2.4}$$

ve

$$\nabla \times \vec{E} = 0 \tag{2.5}$$

şeklindedir. Burada, ρ **(C/m^3) hacimsel yük yoğunluğu** ve ε_0 **(=10^{-9}/36π F/m) serbest uzayın dielektrik sabitidir**. Denk.(2.5)'e göre, statik elektrik alanlar rotasyonelsiz (korunumlu) alanlardır. Ayrıca, Denk.(2.4)'e göre; $\rho = 0$ olmadığı

sürece, elektrostatik alan selenoidal alan olamaz. Bu iki denklem, kısa, basit ve herhangi bir koordinat sisteminden bağımsızdır. **Elektrostatikteki diğer bütün bağıntılar, kanunlar ve teoremler bu iki denklemden türetilebilir**.

Denk.(2.4) ve (2.5) ile verilen $\nabla \cdot \vec{E} = \rho / \varepsilon_0$ ve $\nabla \times \vec{E} = \mathbf{0}$ denklemleri, noktasal bağıntılardır yani, uzayın her noktasında sağlanırlar. Diverjans ve rotasyonel işlemleri uzayın koordinatlarına bağımlı türevleri içerdiğinden, bu denklemler elektrostatiğin diferansiyel denklemleri olarak bilinirler. Pratik uygulamalarda genellikle, bir yük dağılımının toplam alanı dikkate alınır. Bu yüzden, Denk.(2.4)'ün integral formunu elde etmek daha uygundur. Denk.(2.4)'ün her iki tarafının keyfi bir V hacmi üzerinden integrali alınarak,

$$\iiint_V \left(\nabla \cdot \vec{E}\right) dv = \frac{1}{\varepsilon_0} \iiint_V \rho \, dv \qquad (2.6)$$

yazılabilir. Bu denklemin sol tarafına diverjans teoremi uygulanırsa,

$$\oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{Q}{\varepsilon_0} \qquad (2.7)$$

elde edilir. Burada,

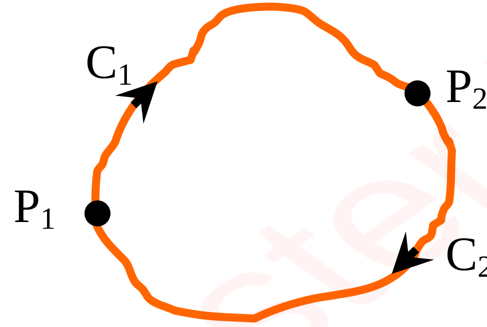
$$Q = \iiint_V \rho \, dv$$

olup, **S yüzeyi ile sınırlandırılmış V hacmindeki toplam yük miktarıdır.** Denk.(2.7), Gauss kanununun bir şeklidir. **Gauss kanununa göre; serbest uzaydaki herhangi bir kapalı yüzeyden dışarı doğru çıkan toplam elektrik alan akısı, yüzeyin sınırladığı hacimdeki toplam yükün ε_0 ile bölümüne eşittir**. Gauss kanunu elektrostatiğin en önemli bağıntılarından biri olup, Bölüm.2.4'de örneklerle incelenecektir.

Denk.(2.5)'de verilen $\nabla \times \vec{E} = \mathbf{0}$ bağıntısı, her iki tarafın açık bir yüzey üzerinden integre edilmesi ve Stokes teoreminin uygulanmasıyla, integral formda ifade edilebilir. Buna göre,

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0 \qquad (2.8)$$

olur. Çizgisel integral, keyfi bir yüzeyi sınırlayan kapalı C çevresi üzerinden alındığından, C çevresi keyfi bir çevredir. **Denk.(2.8)'e göre; herhangi bir kapalı yol etrafında elektrostatik alan şiddetinin skaler çizgisel integrali sıfırdır. Bu ise, elektrik alan şiddetinin korunumlu olduğunu göstermenin değişik bir yoludur**.



Şekil.2.1: Keyfi bir çevre

Şekil.2.1 gözönüne alınarak,

$$\int_{C_1} \vec{E} \cdot d\vec{l} + \int_{C_2} \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0 \qquad (2.9)$$

veya

$$\underset{C_1\ yolu}{\int_{P_1}^{P_2}} \vec{E}\cdot d\vec{l} = -\underset{C_2\ yolu}{\int_{P_2}^{P_1}} \vec{E}\cdot d\vec{l} \qquad (2.10)$$

veya

$$\underset{C_1\ yolu}{\int_{P_1}^{P_2}} \vec{E}\cdot d\vec{l} = \underset{C_2\ yolu}{\int_{P_1}^{P_2}} \vec{E}\cdot d\vec{l} \qquad (2.11)$$

yazılabilir. Denk.(2.11)'e göre; **korunumlu elektrik alan şiddetinin skaler çizgisel integrali yoldan bağımsız olup, sadece yolun uç noktalarına bağımlıdır**. **Denk.(2.11)'deki integral, bir birim yükün P_1 noktasından P_2 noktasına gitmesi durumunda, elektrik alan tarafından yapılan işi göstermektedir.** Bundan dolayı; Denk.(2.8) ve (2.9) ile verilen denklemler, bir elektrostatik alan içinde işin veya enerjinin korunumunu ifade eder.

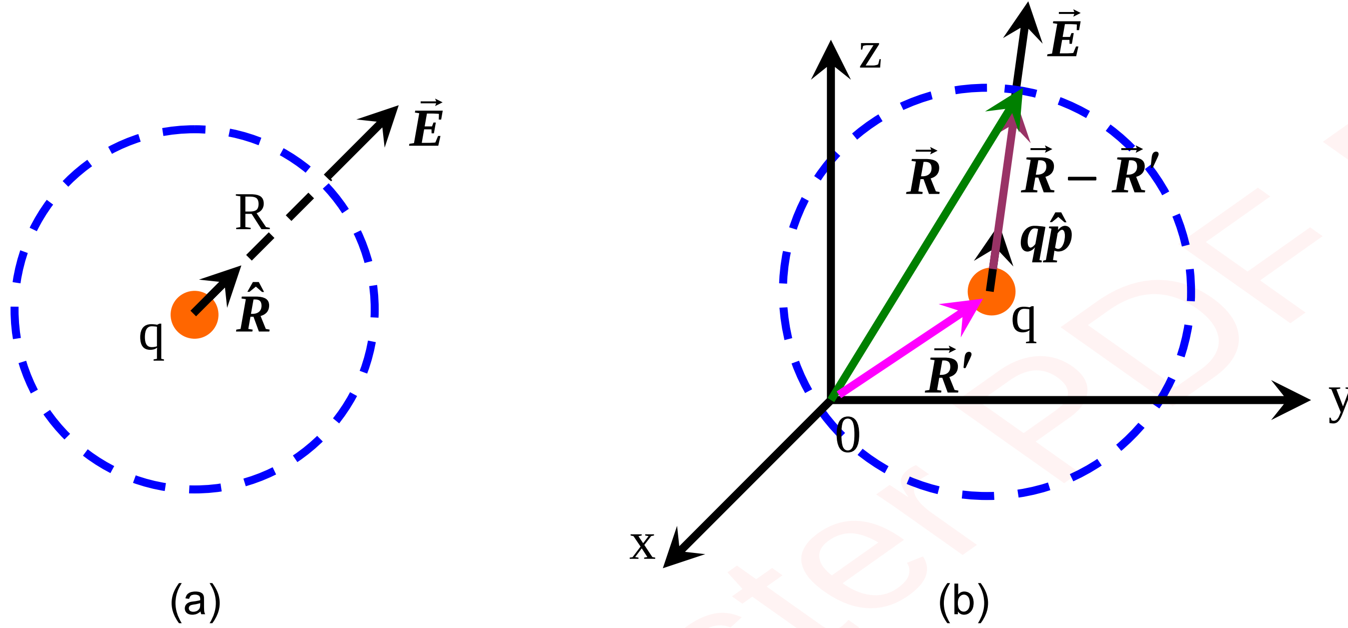
2.3. COULOMB KANUNU

En basit elektrostatik problem olarak, sınırsız serbest uzaydaki bir q noktasal yükünü göz önüne alalım. q noktasal yükünün oluşturduğu elektrik alan şiddetini bulabilmek için, merkezi q yükü üzerinde bulunan R-yarıçaplı hayali bir küresel yüzey düşünelim. Bir noktasal yükün belirli bir yöne sahip olması söz konusu olmadığından, bu yükün elektrik alanı her yerde radyal yönde ve küre yüzeyi üzerindeki her noktada aynı şiddette olmalıdır. Şekil.2.2a'ya $\oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{s} = Q / \varepsilon_0$ denklemi uygulanarak,

$$\oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{s} = \oiint_S (\hat{R} E_R) \cdot \hat{R} ds = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

veya

$$E_R \oiint_S ds = E_R \left(4\pi R^2\right) = \frac{q}{\varepsilon_0}$$



Şekil.2.2: a)Noktasal yük orijinde, b) Noktasal yük orijin dışında iken noktasal yükün elektrik alanı

elde edilir. Bundan dolayı,

$$\vec{E} = \hat{R}E_R = \hat{R}\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R^2} \quad \text{(V/m)} \tag{2.12}$$

yazılabilir. Bu ifade, bir noktasal yükün elektrik alan şiddetinin, yüzeyden dışarı doğru radyal yönde ve yük ile doğru, yükten uzaklığın karesi ile ters orantılı bir

büyüklüğe sahip olduğunu göstermektedir. Denk.(2.12), elektrostatiğin çok önemli ve basit bir ifadesidir. Ayrıca bu ifadedeki $\vec{E}$'nin $\nabla \times \vec{E} = \mathbf{0}$ denklemini sağlayacağı da kolayca ispatlanabilir.

Eğer **q yükü koordinat sisteminin orijininde değilse**, $\vec{E}$'nin hesaplanacağı noktanın ve yükün yerini belirtmek için, $\hat{R}$ birim vektörü ile R uzaklığında uygun değişiklikler yapılmalıdır. q yükünün yer vektörü $\vec{R}'$, P gözlem noktasının (alanın hesaplanacağı noktanın) yer vektörü de $\vec{R}$ olsun (bkz. şekil.2.2b). Buna göre, Denk.(2.12)'den,

$$\vec{E}_p = (q\hat{p})\frac{q}{4\pi\varepsilon_0\left|\vec{R}-\vec{R}'\right|^2} \qquad (2.13)$$

yazılabilir. Burada, $(q\hat{p})$ q'dan p'ye dogru yönelmiş birim vektördür. Bu birim vektör,

$$(q\hat{p}) = \frac{\vec{R}-\vec{R}'}{\left|\vec{R}-\vec{R}'\right|} \qquad (2.14)$$

oldugundan,

$$\vec{E}_p = \frac{q\left(\vec{R}-\vec{R}'\right)}{4\pi\varepsilon_0\left|\vec{R}-\vec{R}'\right|^3} \quad \text{(V/m)} \qquad (2.15)$$

elde edilir.

****

Örnek.2.1: Havada Q(0.2, 0.1, -2.5) noktasında bulunan +5nC'luk bir noktasal yükün P(-0.2, 0, -2.3) noktasında meydana getirdiği elektrik alan şiddetini bulunuz.

Çözüm.2.1: P gözlem noktası için yer vektörü,

$$\vec{R} = \overline{OP} = -\hat{x}0.2 - \hat{z}2.3$$

dir. Q noktasal yükü için yer vektörü ise,

$$\vec{R}' = \overline{OQ} = \hat{x}0.2 + \hat{y}0.1 - \hat{z}2.5$$

olduğundan,

$$\vec{R} - \vec{R}' = -\hat{x}0.4 - \hat{y}0.1 + \hat{z}0.2$$

ve

$$\left|\vec{R}-\vec{R}'\right| = \left[(-0.4)^2 + (-0.1)^2 + (0.2)^2\right]^{1/2} = 0.458 \text{ m}$$

elde edilir. Böylece Denk.(2.15)'den,

$$\vec{E}_p = \left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\right)\frac{Q\left(\vec{R}-\vec{R}'\right)}{\left|\vec{R}-\vec{R}'\right|^3} = 9.10^9 \frac{5.10^{-9}}{(0.458)^3}\left(-\hat{x}0.4 - \hat{y}0.1 + \hat{z}0.2\right)$$

$$= 214.5\left(-\hat{x}0.873 - \hat{y}0.218 + \hat{z}0.437\right) \quad \text{(V/m)}$$

bulunur. Parantez içindeki büyüklük, $(QP) = \left(\vec{R}-\vec{R}'\right)/\left|\vec{R}-\vec{R}'\right|$ formundaki birim vektör olup, 214.5 V/m değeri $\vec{E}_p$'nin büyüklüğüdür. Ayrıca, havanın dielektrik sabiti yaklaşık olarak serbest uzayınkine eşit olduğundan, $(1/4\pi\varepsilon_0)$ faktörü ile oldukça sık karşılaşılır. $\varepsilon_0 = 1/\left(c^2\mu_0\right)$ ve SI birim sisteminde $\mu_0 = 4\pi.10^{-7}$ H/m olduğundan,

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} = \frac{\mu_0 c^2}{4\pi} = 10^{-7}c^2 \quad \text{(m/F)} \qquad (2.16)$$

bulunur. Eğer, $c = 3\cdot10^8$ m/s olarak alınırsa, $\left(1/4\pi\varepsilon_0\right) = 9\cdot10^9$ m/F elde edilir.

****

Eğer q_2 gibi bir noktasal yük, orijinde bulunan başka bir q_1 noktasal yükünün alanı içinde bulunuyorsa; q_1 yükünün q_2'nin bulunduğu yerdeki elektrik alan şiddeti $\vec{E}_{12}$ yüzünden, q_2 yüküne etkiyen bir $\vec{F}_{12}$ kuvveti oluşturulur. Böylece $\vec{F} = q\vec{E}$ ve (2.12) ile verilen $\vec{E} = \hat{R}\left(q/4\pi\varepsilon_0 R^2\right)$ ifadelerden,

$$\vec{F}_{12} = q_2\vec{E}_{12} = \hat{R}\frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0 R^2} \quad \text{(Newton)} \qquad (2.17)$$

elde edilir. Bu denklem, daha önce Denk.(2.1) ile birlikte izah edilen Coulomb kanununun matematiksel formudur. Denk.(2.4) ile verilen $\nabla \cdot \vec{E} = \rho/\varepsilon_0$ temel denkleminin sonucu olarak, R'nin üssü tam olarak 2'dir. SI birim sisteminde, k orantı sabiti $(1/4\pi\varepsilon_0)$'a eşittir.

****

Örnek 2.2: Şekil.2.3'de katot-ışınlı osiloskop'un elektrostatik saptırma sistemi gösterilmiştir. Isıtılan bir katottan ayrılan elektronlara, pozitif yüklü bir anot tarafından $\vec{\upsilon}_0 = \hat{z}\upsilon_0$ gibi bir ilk hız verilmektedir. Elektronlar, saptırma plakaları bölgesine z=0'da girmektedir Saptırma plakaları arasındaki elektrik alan, w genişliğindeki bölgede $\vec{E}_d = -\hat{y}E_d$ dir. Çekim kuvvetlerini ihmal ederek, z=L'deki floresan ekran üzerindeki elektronların düşey sapma miktarını bulunuz.

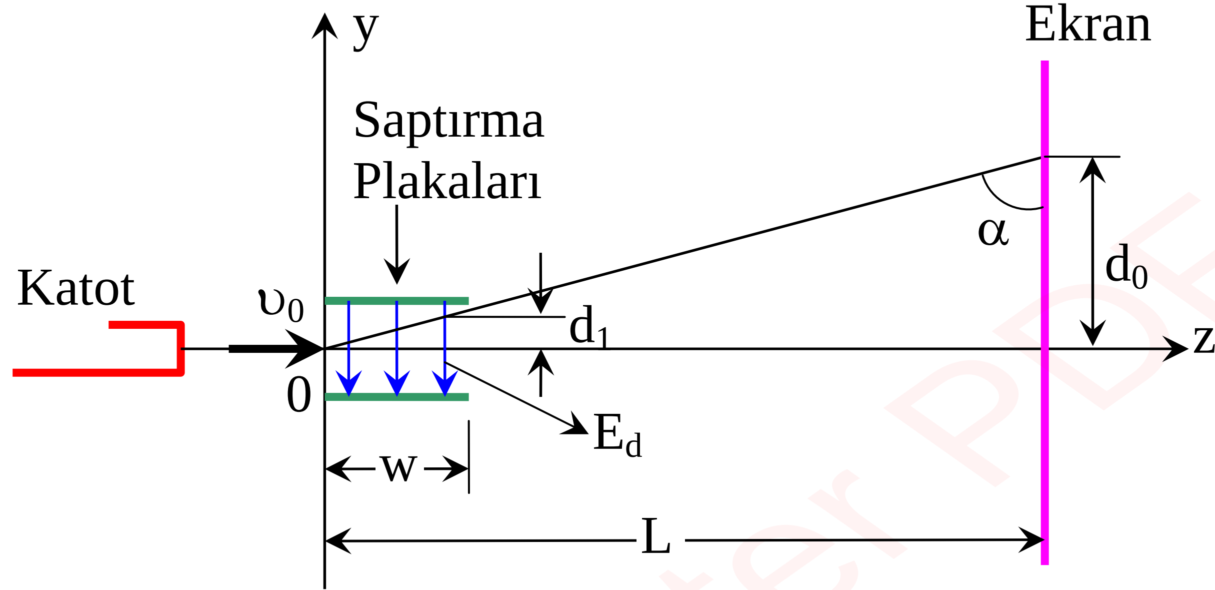
Çözüm.2.2: z>0 bölgesinde z-yönünde kuvvet olmadığından, yatay hız υ_0 dır. $\vec{E}_d$ alanı, her biri (-e) değerinde bir yük taşıyan elektronlara y-yönünde bir sapmaya neden olan bir kuvvet uygular. Buna göre,

$$\vec{F} = (-e)\vec{E}_d = \hat{y}eE_d$$

yazılabilir. Newton'un ikinci hareket kanunundan, düşey yönde,

$$m\frac{d\upsilon_y}{dt} = eE_d$$

yazılabilir. Burada m, elektronun kütlesidir. Bu ifadenin her iki tarafı integre edilirse,



Şekil.2.3: Katot-ışınlı osiloskop’un elektrostatik saptırma sistemi

$$\upsilon_y = \frac{dy}{dt} = \frac{e}{m} E_d t$$

elde edilir. Burada, t=0 anında $\upsilon_y = 0$ olduğundan, integrasyon sabiti sıfır alınmıştır.

Tekrar integral alınarak,

$$y = \frac{e}{2m} E_d t^2$$

şeklinde bir parabolik denklem elde edilir. t=0 anında y=0 olduğundan, yine interasyon sabiti sıfır alınmıştır. Burada, elektronların saptırma plakaları arasında bir parabolik yol izlediğine dikkat ediniz. Saptırma plakalarının çıkışında, $t = (w / \upsilon_0)$ olduğundan,

$$d_1 = \frac{eE_d}{2m}\left(\frac{w}{\upsilon_0}\right)^2$$

ve

$$\upsilon_{y1} = \upsilon_y\left(t = \frac{w}{\upsilon_0}\right) = \frac{eE_d}{m}\left(\frac{w}{\upsilon_0}\right)$$

yazılabilir. Elektronlar ekrana ulaştığında $(L - w)/\upsilon_0$ saniyede $(L - w)$ kadar ileri yönde yatay yol katetmiş olur. Bu zaman süresince,

$$d_2 = \upsilon_{y1}\left(\frac{L - w}{\upsilon_0}\right) = \frac{eE_d}{m}\frac{w(L - w)}{\upsilon_0{}^2}$$

kadar bir ilave yatay saptırma oluşur. Bundan dolayı ekrandaki sapma miktarı,

$$d_0 = d_1 + d_2 = \frac{eE_d}{m\upsilon_0^{\,2}} w\left(L - \frac{w}{2}\right)$$

olur.

****

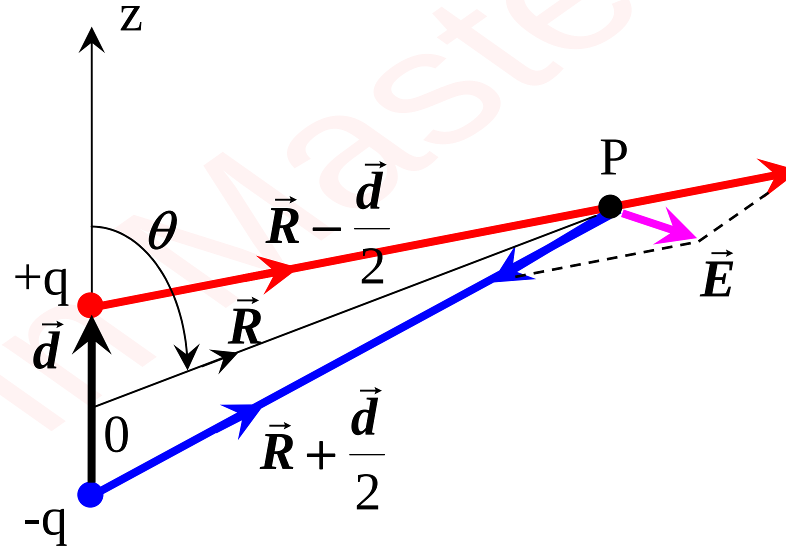
2.3.1. NOKTASAL YÜK SİSTEMİNİN ELEKTRİK ALANI

Farklı noktalara yerleştirilmiş $q_1, q_2, \ldots, q_n$ gibi n-adet noktasal yüklerin oluşturduğu bir elektrostatik alanı göz önüne alalım. Elektrik alan şiddeti, $\hat{R}q / R^2$ nin lineer fonksiyonu olduğundan, süperpozisyon prensibiyle, bir gözlem noktasındaki toplam elektrik alan şiddeti; her yükün oluşturduğu alan şiddetlerinin vektörel toplamı olarak bulunur. Denk.(2.15)'den, yer vektörü $\vec{R}$ olan bir gözlem noktasındaki elektrik alan şiddeti,

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \sum_{k=1}^{n} \frac{q_k \left(\vec{R} - \vec{R}'_k\right)}{\left|\vec{R} - \vec{R}'_k\right|^3} \qquad (2.18)$$

şeklinde yazılabilir. Bu denklem, kısa bir ifade olmasına rağmen, farklı büyüklük ve yönlerdeki vektörleri toplamak gerektiğinden, biraz karmaşıktır.

Şekil.2.4'de gösterildiği gibi, aralarında d uzaklığı bulunan +q ve -q şeklinde zıt işaretli, fakat eşit büyüklükteki bir yük çiftinden oluşan basit bir **elektrik dipolü** göz önüne alalım. Dipolün merkezi aynı zamanda küresel koordinat sisteminin orijinidir. P noktasındaki $\vec{E}$ alanı, iki yükün elektrik alanının toplamıdır. Buna göre;



Şekil 2.4: Dipolün elektrik alanı

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left\{\frac{\vec{R}-\frac{\vec{d}}{2}}{\left|\vec{R}-\frac{\vec{d}}{2}\right|^3} - \frac{\vec{R}+\frac{\vec{d}}{2}}{\left|\vec{R}+\frac{\vec{d}}{2}\right|^3}\right\} \quad (2.19)$$

elde edilir. Bu ifadenin sağ tarafındaki ilk terim, d<<R için basitleştirilebilir. Bu durumda,

$$(a+b)^n = a^n + na^{n-1}b + ... + nab^{n-1} + b^n$$

formundaki Binom serisi kullanılarak ve (d/R)'nin ikinci ve daha yüksek kuvvetli terimleri ihmal edilerek,

$$\left|\vec{R}-\frac{\vec{d}}{2}\right|^{-3} = \left[\left(\vec{R}-\frac{\vec{d}}{2}\right).\left(\vec{R}-\frac{\vec{d}}{2}\right)\right]^{-3/2} = \left[R^2 - \vec{R}.\vec{d} + \frac{d^2}{4}\right]^{-3/2} = R^{-3}\left[1-\frac{\vec{R}.\vec{d}}{R^2}\right]^{-3/2}$$

$$= \boldsymbol{R}^{-3}\left[1+\frac{3}{2}\frac{\vec{\boldsymbol{R}}.\vec{\boldsymbol{d}}}{\boldsymbol{R}^2}\right] \tag{2.20}$$

elde edilir. Benzer şekilde, Denk.(2.19)'un sağ tarafındaki ikinci terim de,

$$\left|\vec{\boldsymbol{R}}+\frac{\vec{\boldsymbol{d}}}{2}\right|^{-3} = \boldsymbol{R}^{-3}\left[1-\frac{3}{2}\frac{\vec{\boldsymbol{R}}.\vec{\boldsymbol{d}}}{\boldsymbol{R}^2}\right] \tag{2.21}$$

şeklinde yazılabilir. Denk.(2.20) ve (2.21) ile verilen ifadeler, Denk.(2.19)'da yerine yazılırsa,

$$\vec{\boldsymbol{E}} = \frac{\boldsymbol{q}}{4\pi\varepsilon_0\boldsymbol{R}^3}\left[3\frac{\vec{\boldsymbol{R}}.\vec{\boldsymbol{d}}}{\boldsymbol{R}^2}\vec{\boldsymbol{R}}-\vec{\boldsymbol{d}}\right] \tag{2.22}$$

elde edilir.

Denk.(2.22)'nin türetilmesi ve açıklanması, vektörel büyüklüklerle işlem yapılmasını gerektirir. Bu durumda, üç veya daha fazla noktasal veya ayrık yükün elektrik alanını belirlemek güç olacaktır. Daha ilerideki konularda, bir yük dağılımının

oluşturduğu elektrik alan şiddetinin daha kolay hesaplanmasına imkan sağlayan skaler elektrik potansiyel kavramı incelenecektir.

Dielektrik ortamdaki elektrik alanın incelenmesinde, elektrik dipol önemlidir. q yükü ile $\vec{d}$ vektörünün çarpımı, **elektrik dipol momenti** $(\vec{p})$ olarak tanımlanır ve

$$\vec{p} = q\vec{d} \tag{2.23}$$

şeklinde ifade edilir. Böylece Denk.(2.22),

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 R^3}\left[3\frac{\vec{R}.\vec{p}}{R^2}\vec{R} - \vec{p}\right] \tag{2.24}$$

şeklinde yazılabilir. Eğer dipol z-ekseni boyunca yerleştirilmiş ise,

$$\vec{p} = \hat{z}p = p\left(\hat{R}\cos\theta - \hat{\theta}\sin\theta\right) \tag{2.25}$$

$$\vec{R}\cdot\vec{p} = Rp\cos\theta \tag{2.26}$$

ve

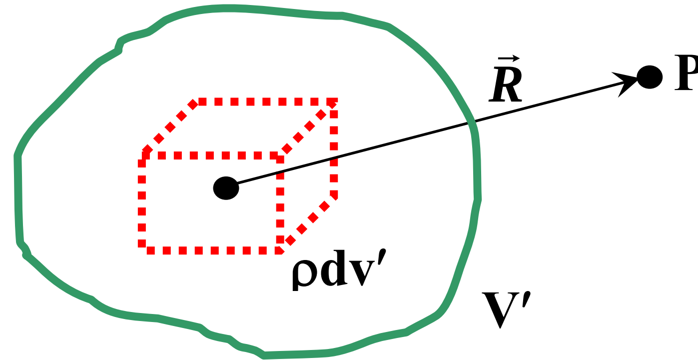
$$\vec{E} = \frac{p}{4\pi\varepsilon_0 R^3}\left(\hat{R}2\cos\theta + \hat{\theta}\sin\theta\right) \quad \text{(V/m)} \tag{2.27}$$

yazılabilir. Bu denklem, küresel koordinatlarda bir elektrik dipolün elektrik alan şiddetini verir. Görüldüğü gibi, bir **dipolün $\vec{E}$ alanı R uzaklığının 3.kuvveti ile ters orantılıdır**. R uzaklığına oranla, yükler arasındaki mesafe çok küçükse, yüklerin oluşturacağı elektrostatik alanlar birbirini yok etmeye başlar. Böylece, elektrostatik dipol alanı bir tek noktasal yükün alanından daha hızlı bir şekilde azalır.

2.3. SÜREKLİ YÜK DAĞILIMININ ELEKTROSTATİK ALANI

Bir sürekli yük dağılımının oluşturduğu elektrostatik alan, bir yük elemanının katkısının yük dağılımı üzerinden integre edilmesi ile elde edilebilir. Bir hacimsel yük dağılımı Şekil.2.5'de verilmiştir. Hacimsel yük yoğunluğu ρ (C/m^3), koordinatların bir fonksiyonudur. Diferansiyel yük elemanı bir noktasal yük gibi davranacağından, dv' diferansiyel hacim elemanındaki $\rho\, dv'$ yükünün gözlem noktası P'deki elektrik alan şiddetine katkısı,

$$d\vec{E} = \hat{R}\frac{\rho\, dv'}{4\pi\varepsilon_0 R^2} \qquad (2.28)$$



Şekil.2.5: Sürekli yük dağılımının elektrik alanı

dir. Bu ifadenin her iki tarafı integre edilerek,

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\iiint_{V'} \hat{R}\frac{\rho}{R^2}dv' \quad \text{(V/m)} \tag{2.29}$$

veya $\hat{R} = \vec{R}/R$ olduğundan,

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\iiint_{V'} \rho\frac{\vec{R}}{R^3}dv' \quad \text{(V/m)} \tag{2.30}$$

elde edilir. Bazı özel durumların dışında, Denk.(2.29) ve (2.30)'daki üç katlı vektörel integrali çözmek güçtür. Çünkü integranddaki üç büyüklük ($\hat{R}$, ρ ve R) dv' hacim elemanının konumu ile değişir.

Eğer yük, bir yüzey üzerinde dağılmış ρ_s (C/m^2) yüzeysel yük dağılımı şeklinde ise, integral, bir yüzey (bu yüzeyin düz olması şart değildir) üzerinden alınır. Böylece,

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \iint_{S'} \hat{R} \frac{\rho_s}{R^2} ds' \quad \text{(V/m)} \qquad (2.31)$$

yazılabilir. Benzer şekilde, çizgisel yük dağılımı için,

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_{L'} \hat{R} \frac{\rho_l}{R^2} dl' \quad \text{(V/m)} \qquad (2.32)$$

dir. Burada ρ_l (C/m) çizgisel yük yoğunluğu ve L', üzerinde yük dağılımı bulunan ve doğrusal olması gerekmeyen çizgidir.

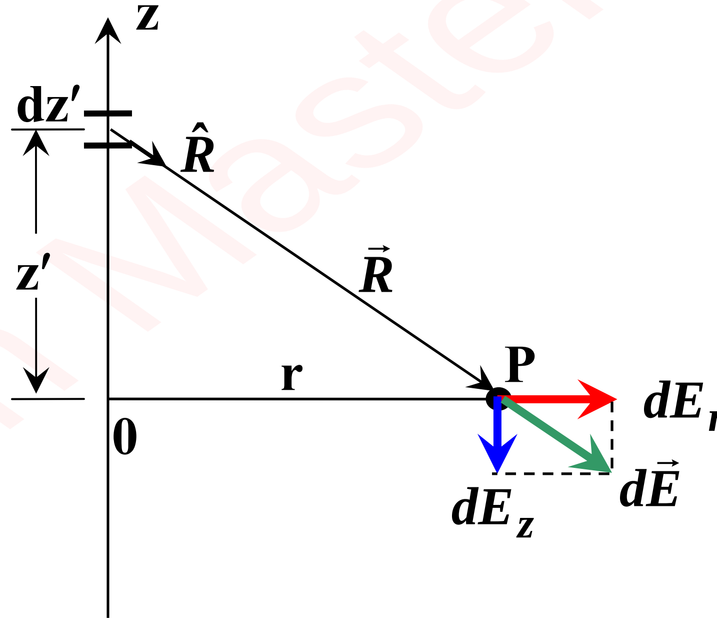
****

Örnek.2.3: Havadaki sonsuz uzun, doğrusal ve düzgün (uniform) çizgisel yük dağılımının elektrik alan şiddetini bulunuz.

Çözüm.2.3: Çizgisel yükün, şekil.2.6'daki gibi, z'-ekseni boyunca dağılmış olduğunu kabul edelim. Burada, (') üslü koordinatlar kaynak noktasını, üssüz

koordinatlar da gözlem noktasını belirtmektedir. Problemde, çizgiden r uzaklıkta bulunan P noktasındaki elektrik alan şiddetinin bulunması istenmektedir. Problem, silindirik simetriye sahip yani, elektrik alan ϕ açısından bağımsız olduğundan, silindirik koordinatlarda çalışmak daha uygundur. Şimdi, Denk.(2.32)'yi tekrar,

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{L'} \rho_l \frac{\boldsymbol{R}}{R^3} dl' \quad \text{(V/m)} \qquad (2.33)$$



Şekil.2.6: Sonsuz uzun doğrusal çizgisel yük

şeklinde yazalım. Burada, ρ_l yük yoğunluğunun sabit ve $dl' = dz'$ çizgi elemanının orijinden keyfi bir z' uzaklığında seçilmiş olduğunu kabul edelim. Ayrıca, $\vec{R}$ vektörünün kaynaktan gözlem noktasına doğru yönelmiş vektörel uzunluk olduğu hatırlanarak,

$$\vec{R} = \hat{r}r - \hat{z}z' \tag{2.34}$$

yazılabilir. $\rho_l dl' = \rho_l dz'$ şeklindeki diferansiyel çizgisel yük elemanının elektrik alanı $d\vec{E}$,

$$\begin{aligned} d\vec{E} &= \frac{\rho_l dz'}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\hat{r}r - \hat{z}z'}{\left(r^2 + z'^2\right)^{3/2}} \\ &= \hat{r}dE_r + \hat{z}dE_z \end{aligned} \tag{2.35}$$

dir. Burada,

$$dE_r = \frac{\rho_l r dz'}{4\pi\varepsilon_0 \left(r^2 + z'^2\right)^{3/2}} \tag{2.35a}$$

ve

$$dE_z = \frac{-\rho_l z' dz'}{4\pi\varepsilon_0 \left(r^2 + z'^2\right)^{3/2}} \qquad (2.35b)$$

dir. **(z') noktasındaki her $\rho_l dz'$ yüküne karşılık, $(-z')$ noktasında da bir $\rho_l dz'$ yük elemanı vardır. Bu yük elemanı da, bileşenleri dE_r ve $-dE_z$ olan bir $d\vec{E}$ alanı meydana getirecektir. Bundan dolayı, z-bileşenleri integrasyon işleminde birbirlerini yok edecekler ve sadece, Denk. (2.35a) ile verilen dE_r ifadesini integre etmek yeterli olacaktır.** Bu durumda,

$$\vec{E} = \hat{r} E_r = \hat{r} \frac{\rho_l r}{4\pi\varepsilon_0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dz'}{\left(r^2 + z'^2\right)^{3/2}}$$

veya

$$\vec{E} = \hat{r} \frac{\rho_l}{2\pi\varepsilon_0 r} \text{ (V/m)} \qquad (2.36)$$

elde edilir. Bu ifade, sonsuz çizgisel yük için önemli bir sonuçtur. Tabii olarak, fiziksel olarak, sonsuz çizgisel yük yoktur ama uzun bir doğrusal çizgisel yükün, çizgisel yüke yakın bir noktadaki $\vec{E}$ alanı için bu denklem yaklaşık bir ifade verir.

****

2.4. GAUSS KANUNU VE UYGULAMALARI

Gauss Kanunu, diverjans teoremi uygulanarak, elektrostatiğin diverjans denkleminden kolayca elde edilebilir. Bu işlem sonucunda,

$$\oiint_S \vec{E}.d\vec{s} = \frac{Q}{\varepsilon_0} \tag{2.37}$$

elde edilir. **Gauss kanununa göre; serbest uzaydaki herhangi bir kapalı yüzeyden dışarı çıkan toplam $\vec{E}$-alanı akısı, yüzeyin sınırladığı hacim içindeki toplam yükün ε_0 ile bölümüne eşittir. Buradaki S yüzeyi, kolaylık amacıyla seçilen herhangi bir matematiksel kapalı yüzeydir ve esasen böyle bir fiziksel yüzey yoktur.**

Gauss kanunu, özellikle, **elektrik alan şiddetinin normal bileşeninin kapalı bir yüzey üzerinde sabit olduğu simetri şartlarına sahip yük dağılımlarının $\vec{E}$-alanının belirlenmesinde**, oldukça elverişlidir. Bu gibi durumlarda, Denk.(2.37)'nin sol tarafındaki integrali hesaplamak çok kolaydır ve elektrik alan şiddetinin hesaplanmasında, Gauss kanunu, Denk.(2.29-(2.33) ile verilen denklemlerden daha uygun olur. Aksi halde, **simetri şartları mevcut değilse, Gauss kanunu uygulanamaz**. **Gauss kanununun uygulanabilmesi için; ilk olarak, simetri şartlarının mevcut olması**, **ikinci olarak da, verilen bir yük dağılımının meydana getirdiği $\vec{E}$ alanının normal bileşeninin sabit olduğu uygun bir yüzeyin seçilebilmesi** gerekir. Böyle bir yüzeye **Gauss yüzeyi** denir. Bu temel prensip, küresel simetriye sahip bir noktasal yük için, Denk(2.12) ile verilen ifadenin elde edilmesinde kullanılmıştı. Bu problem için, noktasal yük üzerinde merkezlenmiş küre yüzeyi, özel bir Gauss yüzeyidir. Ancak, Gauss kanunu, elektrik dipolün $\vec{E}$-alanını veren Denk.(2.22)-(2.27) ifadelerinin elde edilmesinde faydalı

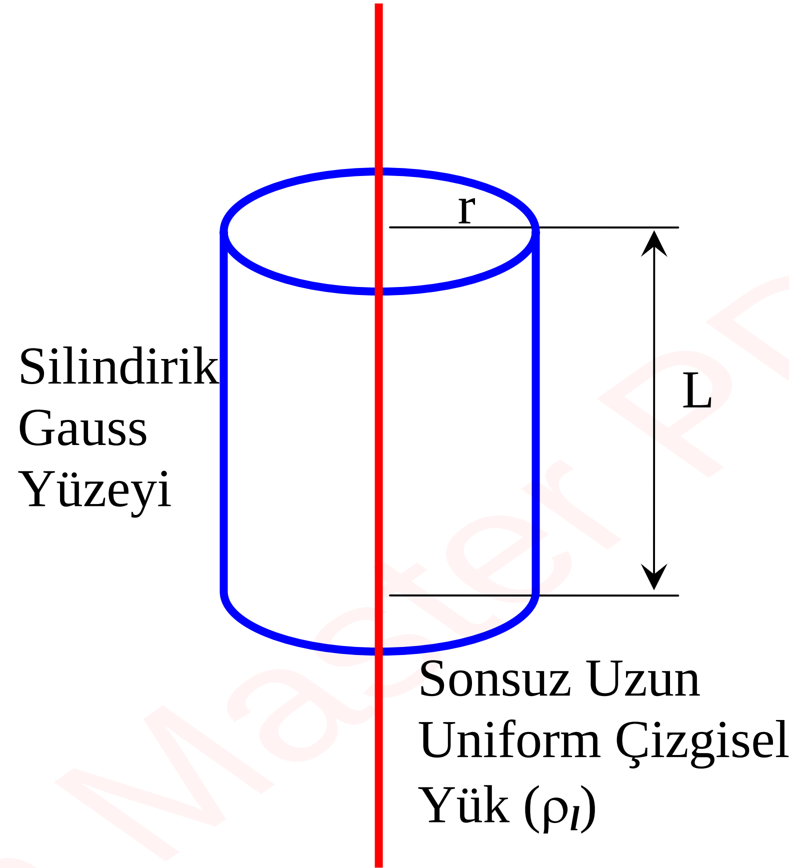
olmamıştır. Çünkü eşit fakat zıt işaretli bir yük çifti etrafında, $\vec{E}$-alanının normal bileşeninin sabit kalacağı bir yüzey yoktur.

****

Örnek.2.4: Gauss kanununu kullanarak, havadaki sonsuz uzun, doğrusal ve düzgün çizgisel yük yoğunluğunun elektrik alan şiddetini bulunuz.

Çözüm.2.4: Bu problem, Denk.(2.32) kullanılarak, örnek.2.3'de çözülmüştü. Çizgisel yük sonsuz uzun olduğundan, meydana gelen $\vec{E}$-alanı çizgisel yüke dik ve radyal ($\vec{E} = \hat{r}E_r$) olmalı ve ayrıca, çizgi boyunca $\vec{E}$'nin bileşeni mevcut olmamalıdır. Ekseni çizgisel yük ile çakışık olmak şartı ile, r-yarıçaplı ve keyfi bir L-uzunluğundaki silindirik yüzey Gauss yüzeyi olarak seçilebilir (Bkz. şekil.2.7). Bu yüzey üzerinde, E_r bileşeni sabit olup, $d\vec{s} = \hat{r}\, rd\phi dz$ dir. Böylece,

$$\oiint_C \vec{E}.d\vec{s} = \int_0^L \int_0^{2\pi} E_r rd\phi dz = 2\pi rLE_r$$



Şekil.2.7: Gauss kanununun sonsuz uzun çizgisel yüke uygulanması

elde edilir. Silindirin üst yüzeyinde $d\vec{s} = \hat{z}rdrd\phi$ olduğundan, silindirin üst veya alt yüzeyinden gelen bir katkı yoktur. Fakat, $\vec{E}.d\vec{s} = 0$ olacağından, $\vec{E}$-'nin z-bileşeni de

yoktur. Silindir içindeki toplam yük $Q = \rho_l L$ dir. Toplam yük miktarı, Denk.(2.37)'de yerine yazılarak,

$$2\pi r L E_r = \frac{\rho_l L}{\varepsilon_0}$$

veya

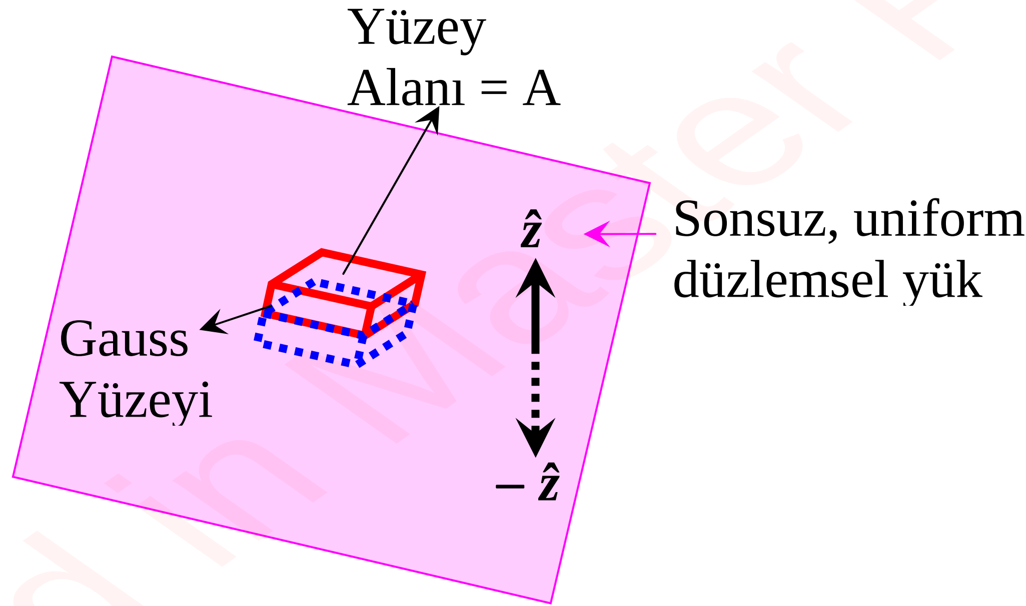
$$\vec{E} = \hat{r} E_r = \hat{r}\frac{\rho_l}{2\pi\varepsilon_0 r}$$

elde edilir. Tabii olarak, bu sonuç Denk.(2.36) ile aynıdır fakat, daha basit bir şekilde elde edilmiştir. Dikkat edilirse, silindirik Gauss yüzeyinin L-uzunluğu sonuçta kaybolmuştur. Bu yüzden, birim uzunlukta bir silindir seçilebilir.

****

Örnek.2.5: ρ_s düzgün yüzeysel yük yoğunluğuna sahip bir sonsuz düzlemsel yükün elektrik alan şiddetini bulunuz.

Çözüm.2.5: Sonsuz geniş yüklü bir levhanın meydana getirdiği $\vec{E}$ -alanının levhaya dik olacağı açıktır. $\vec{E}$'yi bulmak için, Denk.(2.31) kullanılabilir fakat, bu denklem $1/R^2$'nin genel ifadesinin sonsuz sınırlan arasında iki katlı bir integrasyon ihtiva eder. Bu sebeple, burada Gauss kanununu kullanmak daha avantajlıdır.



Şekil.2.8 Gauss kanununun sonsuz düzlemsel çizgisel yüke uygulanması

Gauss yüzeyi olarak, düzlemsel yükten eşit uzaklıkta bulunan ve alt ve üst yüzey alanları A olan bir dikdörtgen kutu seçilebilir (Bkz. şekil.2.8). Kutunun yan yüzleri yüklü levhaya diktir. Yüklü levha xy-düzleminde ise, üst yüzeyde,

$$\vec{E}.d\vec{s} = \left(\hat{z}E_z\right).\left(\hat{z}ds\right) = E_z ds$$

alt yüzey üzerinde,

$$\vec{E}.d\vec{s} = \left(-\hat{z}E_z\right).\left(-\hat{z}ds\right) = E_z ds$$

olur. Yan yüzeylerden herhangi bir katkı gelmeyeceğinden,

$$\oiint_S \vec{E}.d\vec{s} = 2E_z \iint_A ds = 2E_z A$$

elde edilir. Kutu içindeki toplam yük, $Q = \rho_s A$ dir. Bundan dolayı,

$$2E_z A = \frac{\rho_s A}{\varepsilon_0}$$

ve buradan,

$$\vec{E} = \hat{z}E_z = \hat{z}\frac{\rho_s}{2\varepsilon_0} \ , \ z>0$$

$$\vec{E} = -\hat{z}E_z = -\hat{z}\frac{\rho_s}{2\varepsilon_0} \ , \ z<0$$

elde edilir. Tabii olarak, yüklü levha xy-düzleminde olmayabilir (bu durumda, üst ve alt düzlemden bahsedilemez). Fakat, ρ_s pozitif ise, $\vec{E}$ alanı daima levhadan dışarı doğru olur.

****

Örnek.2.6: Hacimsel yük yoğunluğu, $0 \le R \le b$ bölgesinde $\rho = -\rho_0$ (ρ_0 ve b pozitif), R>b bölgesinde $\rho = 0$ olan küresel elektron bulutunun oluşturduğu $\vec{E}$-alanını bulunuz.

Çözüm.2.6: İlk olarak, verilen kaynak şartının küresel simetriye sahip olduğunu kabul edelim. Bundan dolayı, Gauss yüzeyleiri eş merkezli küresel yüzeylerdir, $\vec{E}$-alanı iki bölgede bulunmalıdır (Şekil.2.9).

a) $\mathbf{0} \leq \boldsymbol{R} \leq \boldsymbol{b}$ bölgesi:

$R<b$ bölgesinde, hayali küresel Gauss yüzeyi S_i, elektron bulutunun içinde oluşturulur. Bu yüzey üzerinde, $\vec{E}$ radyal yönde ve sabit büyüklüğe sahiptir. Bu sebeple,

$$\vec{E} = \hat{R} E_R \quad , \qquad d\vec{s} = \hat{R} ds$$

yazılabilir. Yüzeyden dışarı çıkan toplam E akısı,

$$\oiint_{S_i} \vec{E} . d\vec{s} = E_R \iint_{S_i} ds = E_R 4\pi R^2$$

dir. Gauss yüzeyi içindeki toplam yük ise,

$$Q = \iiint_V \rho \, dv = -\rho_0 \iiint_V dv = -\rho_0 \frac{4\pi}{3} R^3$$

dir. Böylece, bu ifadeler yardımı ile Denk.(2.7)'den,

$$\vec{E} = -\hat{R} \frac{\rho_0}{3\varepsilon_0} R \quad , \qquad\qquad \mathbf{0} \leq R \leq b$$

elde edilir. Görüldüğü gibi; uniform elektron bulutu içindeki $\vec{E}$-alanı, merkeze doğru yönlenmiştir.

b) $R \geq b$ bölgesi:

Bu durumda, elektron bulutunun dışındaki $R \geq b$ bölgesinde küresel Gauss yüzeyi oluşturulabilir, a) durumundakine benzer şekilde, $\oiint_{S_0} \vec{E}.d\vec{s}$ ifadesi elde edilebilir.

Toplam yük,

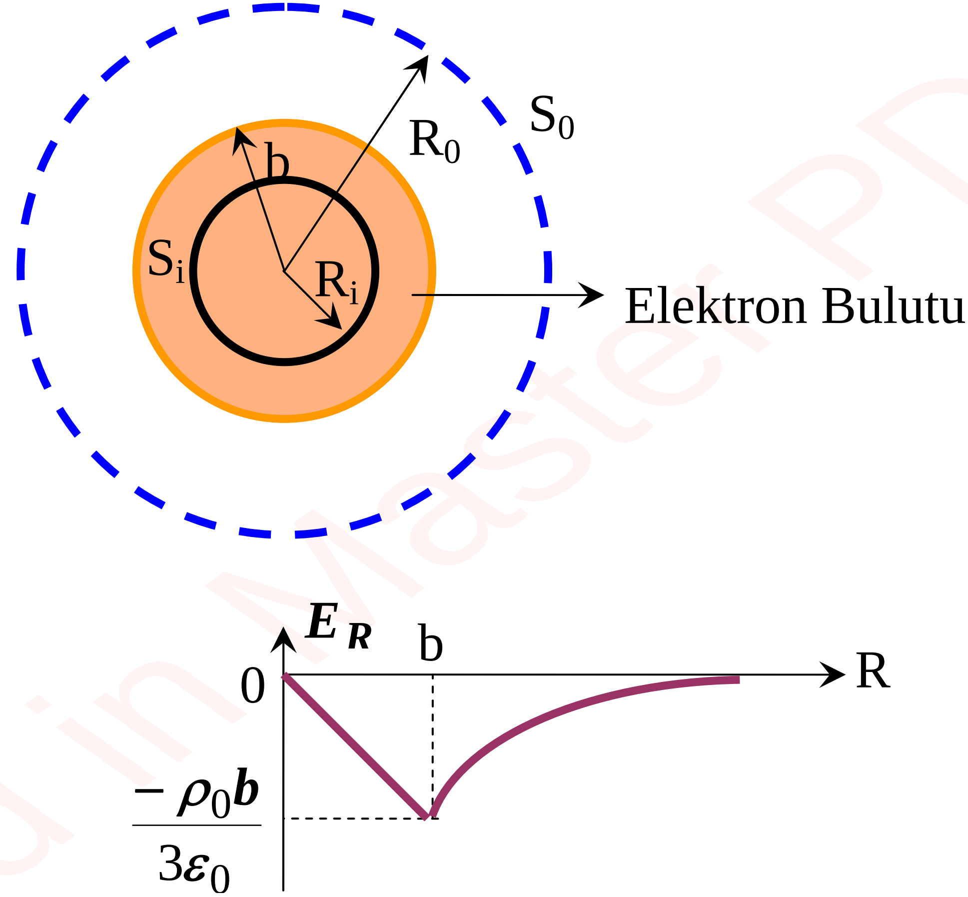
$$Q = -\rho_0 \frac{4\pi}{3} b^3$$

olacağından,

$$\vec{E} = -\hat{R} \frac{\rho_0 b^3}{3\varepsilon_0 R^2}, \qquad R \geq b$$

elde edilir. Bu ifade ters kare kanununa uymakta olup, doğrudan Denk.(2.12)'den de elde edilebilir. Görüldüğü gibi; elektron bulutunun dış tarafındaki $\vec{E}$-alanı, toplam yükün merkezde noktasal yük formunda yoğunlaşması durumunda meydana gelen

elektrik alan ile aynıdır. Genel olarak; ρ yük yoğunluğu, R'nin fonksiyonu olsa dahi, bu söylenen, küresel simetriye sahip yüklü bir bölge için doğrudur.



Şekil 2.9 Bir küresel elektron bulutunun elektrik alan şiddeti

E_R'nin R'ye göre değişimi, Şekil.2.9'da verilmiştir. Eğer Gauss kanunu kullanılamazsa; (1) elektron bulutu içinde keyfi olarak yerleştirilmiş bir diferansiyel hacim elemanı seçmek, (2) $\vec{R}$ vektörel uzunluğunu seçilen koordinat sistemine uygun olarak ifade etmek, (3) Denk (2.29)'da olduğu gibi, üç katlı integrali almak, gerekir. Eğer simetri şartları mevcut ise, en iyi yol Gauss kanununu uygulamaktır.

****

2.5. ELEKTRİK POTANSİYEL

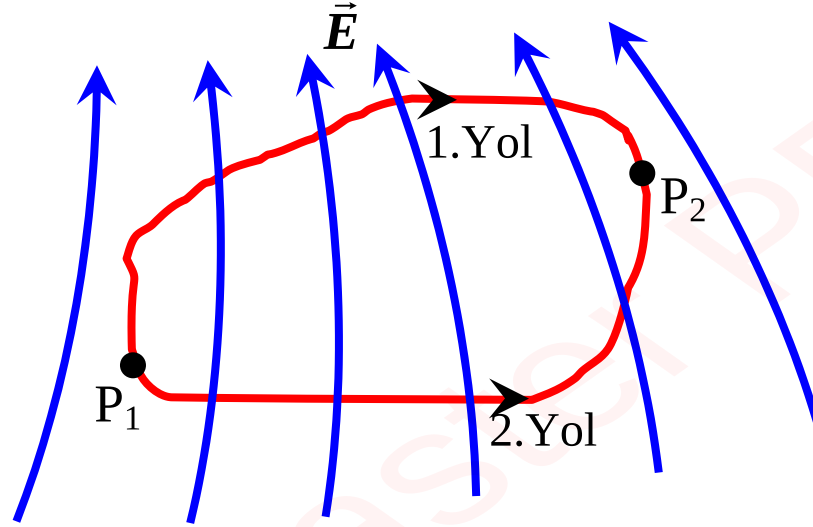
Daha önce belirtildiği gibi; **bir vektörel alanın rotasyoneli sıfır ise bu vektörel alan daima bir skaler alanın gradyenti olarak yazılabilir**. Buna göre,

$$\vec{E} = -\nabla V \qquad (2.38)$$

şeklinde bir skaler V potansiyeli tanımlanır. Skaler büyüklüklerle çalışmak, vektörel büyüklüklerle çalışmaktan daha kolaydır. Eğer V kolayca belirlenebilirse, ortogonal koordinatlar sisteminde uygun gradyent işlemi ile $\vec{E}$-alanı bulunabilir. Denk.(2.28)'deki negatif işaretin sebebi, biraz sonra açıklanacaktır.

Fiziksel öneme sahip olan **elektrik potansiyel, bir yükün bir noktadan başka bir noktaya hareketi esnasında yapılan iş ile ilgilidir**. Bölüm.2.2'de; **elektrik alan şiddeti, birim test yüküne etkiyen kuvvet** olarak tanımlanmıştı. Bundan dolayı, **birim yükün bir elektrik alan içindeki P_1 noktasından P_2 noktasına taşınması esnasında, elektrik alana karşı bir işin yapılması gerekir ve bu iş**,

$$\frac{W}{q} = -\int_{P_1}^{P_2} \vec{E}.d\vec{l} \quad \text{(J/C veya V)} \qquad (2.39)$$



Şekil.2.10: Elektrik alan içinde P_1'den P_2'ye giden iki yol

şeklindedir. P_1'den P_2'ye değişik yollardan ulaşmak mümkündür. Bu yollardan ikisi, Şekil.2.10'da gösterilmiştir. **P_1 ile P_2 arasındaki yol, Denk.(2.39)'da belirtilmediğinden, tabii olarak, işin yola nasıl bağlı olduğu sorulabilir**. Biraz düşünülürse, Denk.(2.39)'daki W/q'nun yola bağlı olmaması gerektiği görülür. **Eğer**

yola bağımlı olsaydı, W'nın daha küçük olduğu bir yol boyunca P_1'den P_2'ye net bir kazanç elde edilerek gidilebilir ve sonra diğer yol boyunca P_1'e geri dönülebilirdi. Ancak, bu durum enerjinin korunumu prensibine aykırıdır. Denk.(2.8) ile verilen

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$$

ifadesi incelendiğinde, **korunumlu (rotasyonelsiz) $\vec{E}$-alanının skaler çizgisel integralinin yoldan bağımsız olduğu sonucuna varılır**.

Mekanikteki potansiyel enerji kavramına benzer şekilde; Denk.(2.39) ile verilen ifade, P_1 ve P_2 noktaları arasında bir birim yükün elektriksel potansiyel enerji farkını gösterir. **Birim yük başına düşen elektriksel potansiyel enerji elektrik potansiyel (V) olarak tanımlanır** ve

$$V_2 - V_1 = -\int_{P_1}^{P_2} \vec{E}.d\vec{l} \quad \text{(V)} \qquad (2.40)$$

şeklinde yazılır. Matematiksel olarak, Denk.(2.38) ifadesi Denk.(2.39)'da yerine yazılırsa, Denk.(2.40) elde edilebilir. Böylece, **V'nin artış oranının, V'nin gradyentinin o yöndeki izdüşümüne (bileşenine) eşit olduğunu gösteren**,

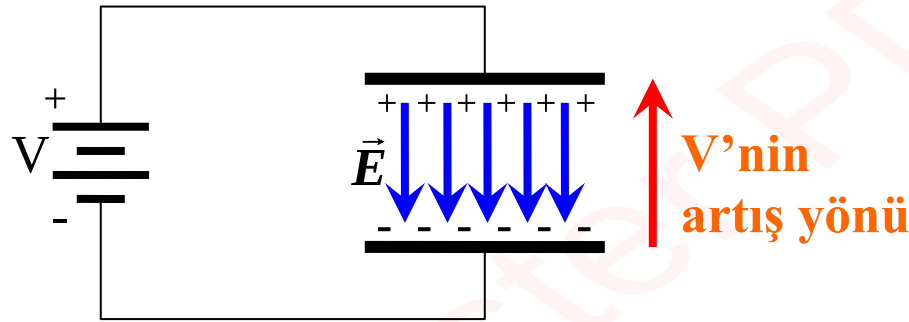
$$\mathbf{dV = (\nabla V) \cdot d\vec{l}}$$

eşitliği kullanılarak,

$$-\int_{P_1}^{P_2} \vec{E}.d\vec{l} = \int_{P_1}^{P_2} (\nabla V) \cdot (\hat{l} dl) = \int_{P_1}^{P_2} dV = V_2 - V_1$$

elde edilir. **Denk.(2.40) ile tanımlanan ifade, P_2 ve P_1 noktaları arasındaki potansiyel farkı, yani elektrostatik voltajdır**. **Bir noktanın mutlak potansiyelinden bahsetmek, bir fazörün mutlak fazı veya bir coğrafik yerin mutlak rakımından bahsetmekten pek farklı değildir**. İlk önce; referans olarak, sıfır potansiyel noktası, sıfır faz noktası (genellikle t=0'da) veya sıfır rakımın (genellikle deniz seviyesi) belirlenmesi gerekir. Çoğu durumda (ama her zaman değil), sıfır potansiyel noktası sonsuzda alınır. Eğer, **referans olarak, sonsuz**

noktası alınmazsa, mutlaka referans noktanın belirtilmesi gerekir. Sonsuzdaki noktanın sıfır potansiyel noktası olarak kabul edilmesi durumunda, potansiyel fonksiyonuna, **mutlak potansiyel** denir.



Şekil.2.11: $\vec{E}$'nin ve V'nin bağıl artış yönleri

Denk.(2.38) ile verilen ifadede iki noktayı belirtmek gerekir. İlk olarak; **negatif işaret, $\vec{E}$-alanına ters yönde artan V elektrik potansiyellini alışılagelmiş şekilde göstermek için** gereklidir. Örneğin, V_0 voltajlı bir DC batarya iki paralel iletken plaka arasına bağlanmış ise (bkz. Şekil.2.11), **üst plakada pozitif, alt plakada negatif yükler toplanır, $\vec{E}$-alanı, pozitif yüklerden negatif yüklere**

doğru yönlenirken potansiyel artışı buna zıt yönde oluşur. İkincisi; biliyoruz ki, ∇V **'nin yönü, sabit V yüzeylerine diktir**. Bundan dolayı, eğer alan çizgileri $\vec{E}$-alanının yönünü gösterecek şekilde yönlenmiş ise, bu alan çizgileri her yerde eş-potansiyel çizgilere ve eş-potansiyel yüzeylere diktir.

2.5.1. BİR YÜK DAĞILIMININ ELEKTRİK POTANSİYELİ

Sonsuzdaki yükten R uzaklıkta bulunan bir q noktasal yükünün elektrik potansiyeli, Denk.(2.40)'dan,

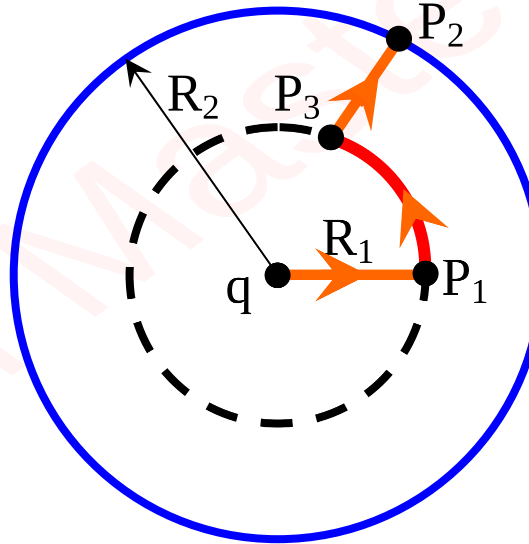
$$V = -\int_{\infty}^{R} \left(\hat{R} \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R^2} \right) \cdot \left(\hat{R} dR \right) \quad (2.41)$$

veya

$$V = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R} \quad (\text{V}) \quad (2.42)$$

şeklinde elde edilir. Bu, bir skaler büyüklük olup, q'dan başka sadece R'ye bağımlıdır. q yükünden R_1 uzaklıktaki P_1 ve R_2 uzaklıktaki P_2 gibi iki nokta arasındaki potansiyel farkı,

$$V_{12} = V_{P2} - V_{P1} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1}\right) \tag{2.43}$$



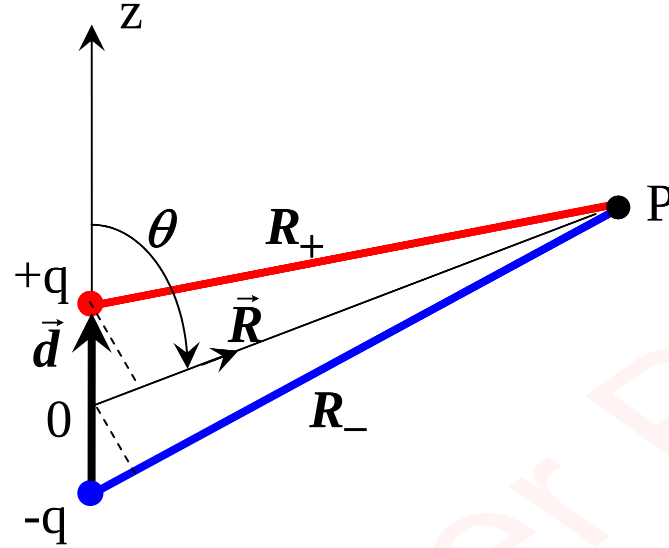
Şekil.2.12: Bir noktasal yük etrafındaki integrasyon yolu

dir. Şekil.2.12'de gösterildiği gibi; P_2 ve P_1 noktaları, q'dan geçen radyal çizgi üzerinde olmadığından, ilk bakışta bir terslik gözükebilir. Ancak, **P_2 ve P_1 noktalarından geçen eş merkezli daireler (küreler), eş-potansiyel çizgiler (yüzeyler)'dir** ve **V_{P2} - V_{P1} potansiyel farkı V_{P2} - V_{P3} ile aynıdır**. Denk.(2.40) açısından, integrasyon yolu, P_1'den P_3'e ve P_3'den P_2'ye seçilebilir. **$\vec{E}$ -alanı dairesel yol boyunca $d\vec{l} = \hat{\phi}\, R_1 d\phi$ elemanına dik ($\vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$) olduğundan, P_1'den P3'e kadar yapılan iş yoktur.**

$\vec{R}_1, \vec{R}_2, ..., \vec{R}_n$ uzaklıklarındaki q_1, q_2,...,q_n noktasal yüklerinden oluşan bir sistemin elektrik potansiyeli, süperpozisyon prensibine göre, yüklerin potansiyellerinin toplamına eşittir. Yani,

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \sum_{k=1}^{n} \frac{q_k}{\left|\vec{R} - \vec{R}'_k\right|} \qquad (2.44)$$

dir. Bu bir skaler toplam olduğundan, V'nin gradyentinin negatifi ile $\vec{E}$ -alanını elde etmek, Denk.(2.18)'deki vektörel toplam ile $\vec{E}$ -alanını elde etmekten daha kolaydır.



Şekil.2.13: Elektrik Dipol

Örnek olarak; aralarında küçük bir d-mesafesi bulunan +q ve -q yüklerinden oluşan bir elektrik dipolü tekrar gözönüne alalım. P gözlem noktasının yüklere uzaklığı, R_+ ve R_- olsun (bkz. Şekil.2.13). P noktasındaki potansiyel,

$$V = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R_+} - \frac{1}{R_-}\right) \tag{2.45}$$

şeklinde yazılabilir. Eğer d<<R ise,

$$(a+b)^n = a^n + na^{n-1}b + \ldots\ldots + nab^{n-1} + b^n$$

şeklindeki Binom serisi yardımı ile,

$$\frac{1}{R_+} \cong \left(R - \frac{d}{2}\cos\theta\right)^{-1} \cong R^{-1}\left(1 + \frac{d}{2R}\cos\theta\right) \qquad (2.46)$$

ve

$$\frac{1}{R_-} \cong \left(R + \frac{d}{2}\cos\theta\right)^{-1} \cong R^{-1}\left(1 - \frac{d}{2R}\cos\theta\right) \qquad (2.47)$$

yazılabilir. Denk.(2.46) ve (2.47)'de verilen ifadeler, Denk.(2.45)'de yerine yazılırsa,

$$V = \frac{qd\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 R^2}$$

veya

$$V = \frac{\vec{p}\cdot\hat{R}}{4\pi\varepsilon_0 R^2} \qquad (2.48)$$

elde edilir. Burada, $\vec{p} = q\vec{d}$ dir.

$\vec{E}$ -alanı ($-\nabla V$)’den elde edilebilir. Küresel koordinatlarda,

$$\vec{E} = -\nabla V = -\hat{R}\frac{\partial V}{\partial R} - \hat{\theta}\frac{1}{R}\frac{\partial V}{\partial \theta} - \hat{\phi}\frac{1}{R^2 \sin\theta}\frac{\partial V}{\partial \phi}$$
$$= \frac{p}{4\pi\varepsilon_0 R^3}\left(\hat{R}2\cos\theta + \hat{\theta}\sin\theta\right) \qquad (2.49)$$

dir. Bu denklem Denk.(2.27) ile aynıdır.

****

Örnek 2.7: Bir elektrik dipolün elektrik alan ve eş-potansiyel çizgilerinin iki boyutlu grafiğini elde ediniz.

Çözüm 2.7: Bir yük dağılımının eş-potansiyel yüzey denklemi, V'nin bir sabite eşitlenmesiyle elde edilir. Denk.(2.48)’deki

$$V = \frac{qd\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 R^2}$$

denkleminde q, d ve ε_0 sabit büyüklükler olduğundan, V'nin sabit olabilmesi için ($\text{Cos}\theta/R^2$) oranının sabit olması gerekir. Bundan dolayı, eş-potansiyel yüzey denklemi,

$$R = C_V \sqrt{\cos\theta} \tag{2.50}$$

dir. Burada C_V bir sabittir. C_V'nin değişik değerleri için, R'nin θ'ya göre grafiği çizilerek, Şekil.2.14'de sürekli çizgilerle gösterilen eşpotansiyel çizgileri elde edilir. $0 \le \theta \le \pi/2$ bölgesinde, V pozitif, θ=0 derecede R maksimum ve θ=90 derecede R sıfırdır. V'nin negatif olduğu $\pi/2 \le \theta \le \pi$ bölgesinde ise bunun ayna görüntüsü elde edilir.

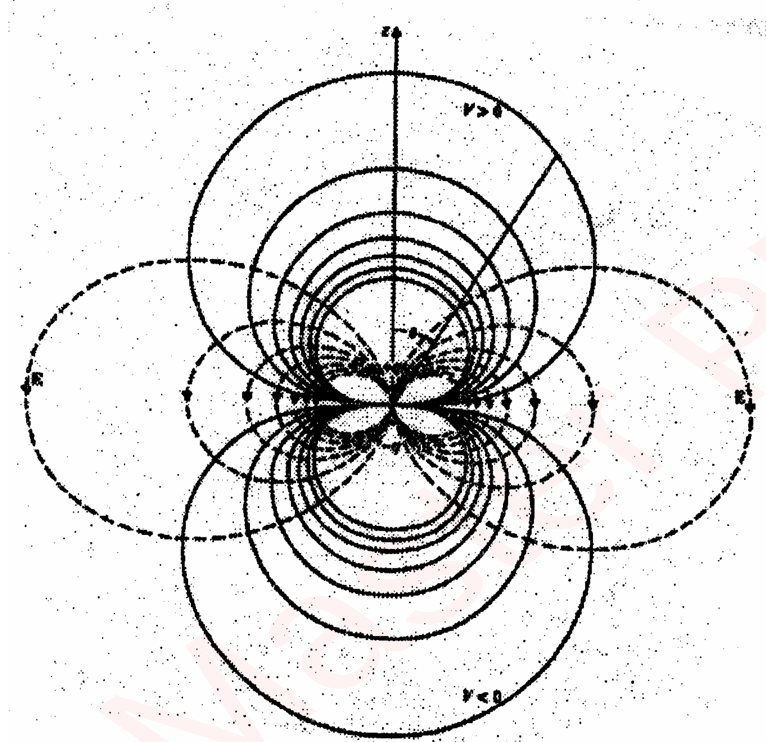
Elektrik alan çizgileri, uzaydaki $\vec{E}$-alanının yönünü gösterir. Şimdi,

$$d\vec{l} = k\vec{E} \tag{2.51}$$

olsun. Burada k bir sabittir. Küresel koordinatlarda, Denk.(2.51) ifadesi,

$$\hat{R}dR + \hat{\theta}Rd\theta + \hat{\phi}R\sin\theta d\phi = k\left(\hat{R}E_R + \hat{\theta}E_\theta + \hat{\phi}E_\phi\right) \tag{2.52}$$

şeklinde yazılabilir. Buradan,



Şekil.2.14: Bir elektrik dipolün eşpotansiyel ve elektrik alan çizgileri

$$\frac{dR}{E_R} = \frac{Rd\theta}{E_\theta} = \frac{R\sin\theta d\phi}{E_\phi} \tag{2.53}$$

elde edilir. Bir elektrik dipolde, E_ϕ bileşeni yoktur ve

$$\frac{dR}{2\cos\theta} = \frac{Rd\theta}{\sin\theta}$$

veya

$$\frac{dR}{R} = \frac{2d(\sin\theta)}{\sin\theta} \qquad (2.54)$$

dir. Bu denklem integre edilerek,

$$R = c_E \sin^2\theta \qquad (2.55)$$

elde edilir. Burada c_E, sabittir. $\theta = \pi/2$'de maksimumlara sahip olan elektrik alan çizgileri, Şekil.2.14'de kesikli çizgilerle gösterilmiştir. Bu çizgiler, z-ekseni etrafında rotasyonel olarak simetriktir (ϕ den bağımsız) ve her yerde eşpotansiyel çizgilere diktir.

****

Verilen bir bölge içinde bulunan sürekli yük dağılımının elektrik potansiyeli, bir yük elemanının katkısının yüklü bölge üzerinden integre edilmesi suretiyle elde edilir.

Hacimsel yük dağılımı için,

$$\boldsymbol{V} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \iiint_{V'} \frac{\rho}{\boldsymbol{R}} \boldsymbol{dv'} \quad \text{(V)} \qquad (2.56)$$

yüzeysel yük dağılımı için,

$$\boldsymbol{V} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \iint_{S'} \frac{\rho_s}{\boldsymbol{R}} \boldsymbol{ds'} \quad \text{(V)} \qquad (2.57)$$

ve **çizgisel yük dağılımı için**,

$$\boldsymbol{V} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_{L'} \frac{\rho_l}{\boldsymbol{R}} \boldsymbol{dl'} \quad \text{(V)} \qquad (2.58)$$

dir.

****

Örnek 2.8: Düzgün yüzeysel yük yoğunluğu ρ_s olan, b yarıçaplı bir dairesel, diskin ekseni üzerindeki elektrik alan şiddetini bulunuz.

Çözüm 2.8: Her ne kadar disk dairesel simetriye sahip olsa da, bunun etrafında $\vec{E}$'nin normal bileşeninin sabit olduğu bir yüzey hayal edilemez. Bu yüzden, bu problemin çözümü için, Gauss kanunu kullanılamaz ancak Denk.(2.57) kullanılabilir, Şekil.2.15'de olduğu gibi, silindirik koordinatlar kullanılarak,

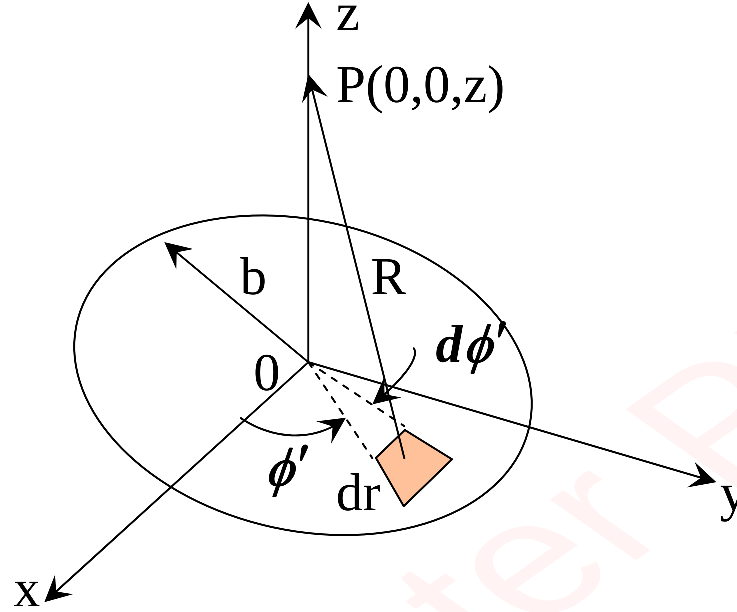
$$ds' = r'dr'd\phi'$$

ve

$$R = \sqrt{z^2 + (r')^2}$$

yazılabilir. Sonsuzdaki noktaya göre, P(0,0,z) noktasındaki potansiyel

$$V = \frac{\rho_s}{4\pi\varepsilon_0} \int_0^{2\pi} \int_0^{b} \frac{r'}{\left(z^2 + r'^2\right)^{1/2}} dr'd\phi' = \frac{\rho_s}{2\varepsilon_0} \left[\left(z^2 + b^2\right)^{1/2} - |z| \right] \qquad (2.59)$$



Şekil.2.15: Düzgün yüklü disk

dir. Bundan dolayı,

$$\vec{E} = -\nabla V = -\hat{z}\frac{\partial V}{\partial z}$$

$$= \begin{cases} \hat{z}\dfrac{\rho_s}{2\varepsilon_0}\left[1 - z\left(z^2 + b^2\right)^{-1/2}\right] & z>0 \quad (2.60a) \\ -\hat{z}\dfrac{\rho_s}{2\varepsilon_0}\left[1 + z\left(z^2 + b^2\right)^{-1/2}\right] & z<0 \quad (2.60b) \end{cases}$$

elde edilir. Eksen dışındaki bir noktada elektrik alam nasıl bulabileceğinizi tartışınız. Büyük z-değerleri için, Denk.(2.60a,b)'deki ikinci terimleri Binom serisine açmak ve (b^2/z^2) oranının ikinci ve daha yüksek mertebeden terimlerini ihmal etmek uygundur. Buna göre;

$$z\left(z^2+b^2\right)^{-1/2}=\left(1+\frac{b^2}{z^2}\right)^{-1/2}\cong 1-\frac{b^2}{2z^2}$$

yazılabilir. Bu ifade, Denk.(2.60a,b)'de yerine yazılması halinde,

$$\vec{E}=\hat{z}\frac{\left(\pi b^2\rho_s\right)}{4\pi\varepsilon_0 z^2}=\begin{cases}\hat{z}\dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 z^2} & z>0 \qquad (2.61a)\\[2ex] -\hat{z}\dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 z^2} & z<0 \qquad (2.61b)\end{cases}$$

elde edilir. Burada, Q disk üzerindeki toplam yük miktarıdır. Bundan dolayı, gözlem noktası diskten çok uzakta ise; sanki toplam yük bir noktada yoğunlaşmış gibi, $\vec{E}$-alanı yaklaşık olarak ters kare kanununa uygun şekildedir.

****

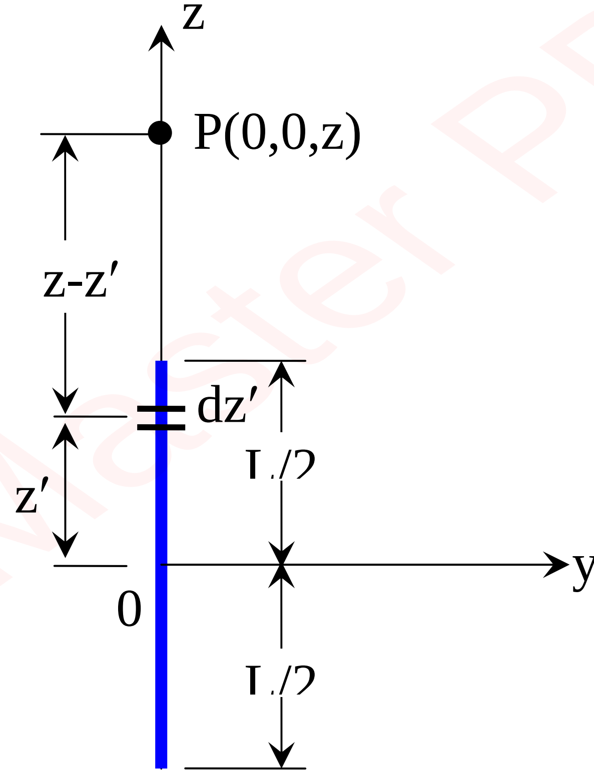
Örnek 2.9: L-uzunluğundaki uniform çizgisel yükün ekseni boyunca elektrik alan şiddetini bulunuz.

Çözüm 2.9: Sonsuz uzun çizgisel yük için, Örnek.2.4'ün çözümüne benzer şekilde Gauss kanunu uygulanarak, $\vec{E}$-alanı kolayca bulunabilir. Ancak, Şekil.2.1'daki gibi sonlu uzunluktaki bir çizgisel yük için, $\vec{E}.d\vec{s}$'in sabit olduğu bir Gauss yüzeyi oluşturulamaz. Bu yüzden, burada Gauss kanunu kullanışlı değildir.

Bunun yerine, z' noktasında $dl' = dz'$ gibi bir yük elemanı alınarak, Denk.(2.58) kullanılabilir. Çizgisel yükün ekseni boyunca, yük elemanının P(0,0,z) noktasına uzaklığı (R),

$$R = (z - z') \quad , \qquad z > \frac{L}{2}$$

dir. Burada, kaynak noktasının konumunu (' üslü koordinatlar), gözlem noktasının konumundan (üssüz koordinatlar) ayırt etmek çok önemlidir. Kaynak bölgesi üzerinden integral alınarak,



Şekil.2.16: Sonlu çizgisel yük

$$V = \frac{\rho_l}{4\pi\varepsilon_0}\int_{-L/2}^{L/2}\frac{dz'}{z-z'} \quad , \qquad z > \frac{L}{2} \tag{2.62}$$
$$= \frac{\rho_l}{4\pi\varepsilon_0}\ln\left[\frac{z+(L/2)}{z-(L/2)}\right]$$

elde edilir. P-noktasındaki $\vec{E}$-alanı, (') üssüz gözlem noktasının koordinatlarına göre V'nin gradyentidir. Bu problem için,

$$\vec{E} = -\hat{z}\frac{dV}{dz} = \hat{z}\frac{\rho_l L}{4\pi\varepsilon_0\left[z^2-(L/2)^2\right]} \quad , \qquad z > \frac{L}{2} \tag{2.63}$$

****

Son iki örnekte, Gauss kanununun uygulanamadığı durumlarda, V potansiyeli yardımı ile $\vec{E}$'nin belirlenmesi için, bir metot gösterilmiştir. Ancak, simetri şartları mevcut ise ve $\vec{E}\cdot d\vec{s}$'nin sabit olduğu bir Gauss yüzeyi oluşturulabilirse, $\vec{E}$'i doğrudan belirlemek daima daha kolay olacaktır. Eğer, istenirse, integrasyonla $\vec{E}$'den V potansiyeli elde edilebilir.

2.6. ELEKTROSTATİK ALAN İÇİNDEKİ İLETKENLER

Buraya kadar, sadece, serbest uzay veya havadaki durgun yük dağılımlarının elektrik alanı incelendi, şimdi, maddesel ortam içinde alanın davranışı incelenecektir. Genel olarak, maddeler elektriksel özelliklerine göre, üç gruba ayrılırlar. Bu gruplar, iletkenler, yarı iletkenler ve yalıtkanlar (dielektrikler)'dir. Kabaca, **pozitif yüklü bir çekirdek ile, bu çekirdek etrafındaki yörüngelerde dönen elektronlardan oluşan atom modeline göre**, **iletken atomlarının en dış kabuklarındaki elektronlar yörüngelerine gevşek bir şekilde bağlıdırlar ve kolayca, bir atomdan diğerine geçebilirler**. Metallerin pek çoğu bu gruba girerler. Ancak, **yalıtkan veya dielektrik maddelerin atomlarındaki elektronlar, yörüngelerine sıkı bir şekilde bağlıdırlar. Dışarıdan bir elektrik alanın uygulanması halinde bile, normal durumlarından ayrılmazlar**. **Yarı iletkenlerin elektriksel özellikleri ise, iletkenler ile yalıtkanların özellikleri arasında kalır ve az sayıda serbestçe hareket edebilen yüklere sahiptirler.**

Katı maddelerin band teorisine göre, elektronların izinli enerji bandları vardır. Bu bandların herbiri, oldukça yakın aralıklı, ama ayrık enerji seviyelerinden oluşur. Bu enerji bandları arasında yasak bölgeler veya aralıklar vardır. Bu yasak bölgelerde, katı atomlarının elektronları bulunamaz. İletkenler, kısmen elektronlarla dolu üst enerji bandına veya kısmen dolu üst üste binmiş üst band çiftine sahiptir. Üst üste binmiş bu bandlardaki, elektronlar, sadece küçük bir enerji değişimi ile bir banddan diğerine geçebilir. İzolatör veya dielektrikler, üst bandları tamamen dolu olan maddelerdir. Bu yüzden, bir sonraki yüksek banda kadar büyük bir enerji aralığının varlığı sebebiyle, normal olarak iletim oluşmaz. Eğer, yasak bölgenin enerji aralığı bağıl olarak küçükse, bir sonraki banda geçiş için, az miktarda bir dış enerji, dolu üst banddaki elektronları uyarmaya yetebilir ve iletim oluşur. Bu maddelere, yarı iletkenler denir.

Bir maddesel ortamın makroskobik elektriksel özelliği, iletkenlik denilen bir temel parametre ile karekterize edilebilir. Ancak bu bölümde, akım akışı ile

ilgilenilmeyeceğinden ve sadece, maddesel ortamdaki elektrostatik alan inceleneceğinden dolayı, iletkenliğin tanımı şu anda önemli değildir. **Bu bölümde, bir iletkenin yüzeyindeki ve cismin içindeki elektrik alan ve yük dağılımı ele alınacaktır.**

Bir iletkenin içinde bir miktar pozitif (veya negatif) yük bulunduğunu kabul edelim. Bu durumda, iletken içinde bir elektrik alan oluşacak ve bu alan, yüklere bir kuvvet uygulayarak onları birbirinden uzaklaştıracaktır. Yüklerin birbirlerinden uzaklaşma hareketi, bütün yükler iletken yüzeyine ulaşıncaya kadar devam edecek ve iletkenin iç tarafında hem yük, hem de elektrik alan sıfır oluncaya kadar, aynı şekilde kendi kendilerine tekrar dağıtacaklardır. Bundan dolayı, statik şartlar altında, bir iletkenin içinde,

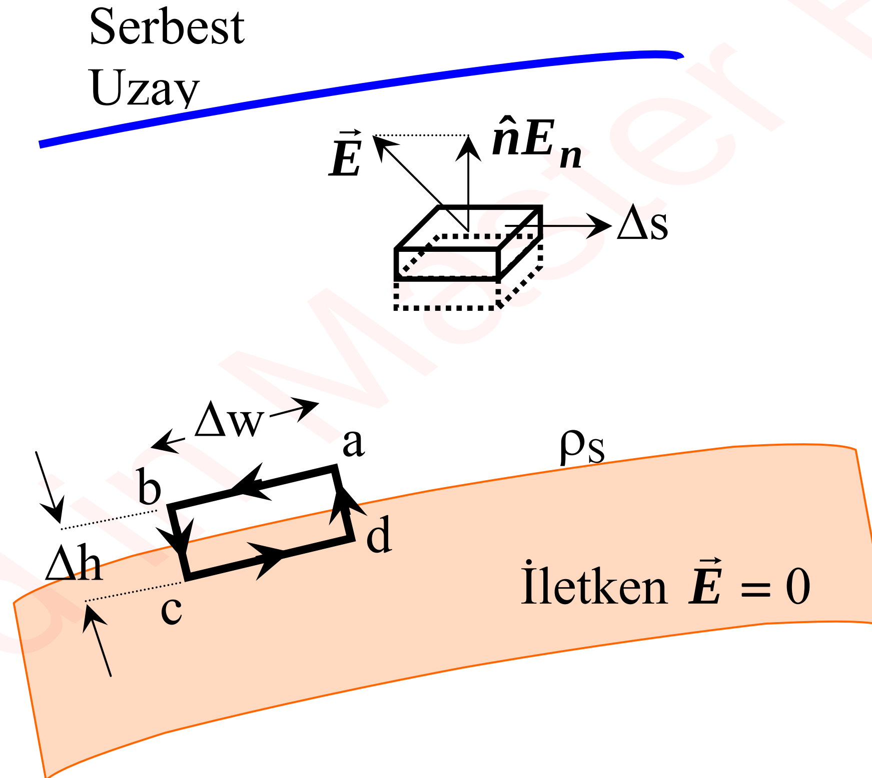
$$\rho = \mathbf{0} \quad (2.64)$$

$$\vec{E} = \mathbf{0} \quad (2.65)$$

dir. **Bir iletkenin içinde yük yoksa ($\rho = \mathbf{0}$), $\vec{E}$ sıfır olmalıdır.** Çünkü Gauss kanununa göre, iletkenin iç tarafında oluşturulan bir kapalı yüzeyden dışarı doğru çıkan elektrik akısı sıfır olmalıdır.

Bir iletkenin yüzeyindeki yük dağılımı, yüzeyin şekline bağlıdır. Eğer, **elektrik alan şiddetinin, bir teğetsel kuvvet oluşturan ve yükleri hareket ettiren teğetsel bileşeni mevcut ise**, **yüklerin denge halinde olmayacağı açıktır**. Bundan dolayı, statik şartlarda, bir iletkenin yüzeyindeki $\vec{E}$-alanı her yerde yüzeye diktir. Başka bir deyişle; **bir iletkenin yüzeyi, statik şartlarda, bir eşpotansiyel yüzeydir. Zaten, bir iletkenin iç tarafındaki her yerde $\vec{E} = \mathbf{0}$ olduğundan, bütün iletken aynı elektrostatik potansiyele sahiptir.** Yüklerin bir iletken yüzeyi üzerinde tekrar dağılması ve denge durumuna ulaşması için, sonlu bir zaman gerekir. Bu zaman, maddenin iletkenliğine bağlıdır. Bakır gibi bir iyi iletken için, bu zaman 10^{-19}s. mertebesindedir. Bu süre, çok kısa bir geçiş dönemini gösterir.

Şekil.2.17'de, bir iletken ile serbest uzay arasındaki arayüzey (veya sınır yüzeyi) gösterilmiştir. Genişliği ab=cd=Δw, yüksekliği bc=da=Δh olan abcda çevresini göz önüne alalım, ab ve cd kenarları sınır yüzeyine paraleldir. $\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$ denklemi uygulanarak, iletken içinde elektrik alanın sıfır olduğu dikkate alınarak, $\Delta h \to 0$ için,



Şekil.2.17: İletken-serbest uzay sınır yüzeyi

$$\oint_{abcda} \vec{E} \cdot d\vec{l} = E_t \Delta w = 0$$

veya

$$E_t = \mathbf{0} \qquad (2.66)$$

elde edilir. Buna göre; **bir iletkenin yüzeyindeki $\vec{E}$-alanının teğetsel bileşeni sıfırdır.** İletken yüzeyinde $\vec{E}$-alanının normal (dik) bileşeni E_n'i bulmak için, üst yüzeyi serbest uzayda, alt yüzeyi iletken içinde (burada $\vec{E} = \mathbf{0}$ dır) bulunan ince bir kutu, Gauss yüzeyi olarak alınabilir. $\oint\!\!\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{s} = \dfrac{Q}{\varepsilon_0}$ denklemi kullanılarak,

$$\oint\!\!\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{s} = E_n \Delta S = \frac{\rho_s \Delta S}{\varepsilon_0}$$

veya

$$E_n = \frac{\rho_s}{\varepsilon_0} \qquad (2.67)$$

elde edilir. **Bu yüzden, bir iletken serbest uzay sınırındaki $\vec{E}$ -alanının normal bileşeni, iletken üzerindeki yüzeysel yük yoğunluğunun serbest uzayın dielektrik katsayısına bölümüne eşittir.**

Yüksüz bir iletken elektrostatik alan içine yerleştirilirse; bu alan, iletkende gevşek olarak bulunan elektronların alana zıt yönde, pozitif yüklerin alan ile aynı yönde hareketine neden olacaktır. Bu indüklenmiş serbest yükler, iletken yüzeyinde dağılacak ve bir indüklenmiş alan oluşacaktır. Bu alan ile iletkenin iç tarafındaki ve yüzeyindeki alanlar birbirlerini yok edecek şekildedir. Yüzeysel yük dağılımı dengeye ulaştığında, Denk.(2.64)-(2.67) ile verilen dört bağıntının hepsi sağlanacak ve iletken, tekrar bir eş-potansiyel madde olacaktır.

****

Örnek 2.10: İç yarıçapı R_i, dış yarıçapı R_o olan bir küresel iletken kabuğun merkezinde pozitif Q noktasal yükü bulunduğuna göre, R radyal uzaklığının fonksiyonu olarak $\vec{E}$ ve V'yi bulunuz.

Çözüm 2.10: Problemin geometrisi, Şekil.2.18'de gösterilmiştir. Küresel simetri olduğundan, Gauss kanununu kullanarak $\vec{E}$'yi ve daha sonra, integrasyon yolu ile V'yi belirlemek, en kolay yoldur. Bu problemde, üç ayrı bölge söz konusudur: **(a)** $R>R_o$, **(b)** $R_i \leq R \leq R_0$ ve **(c)** $R<R_i$. Bu bölgelerde, uygun şekilde küresel Gauss yüzeyleri oluşturulacaktır. Bu üç bölgede, $\vec{E} = \hat{R}E_R$ olacağı açıktır.

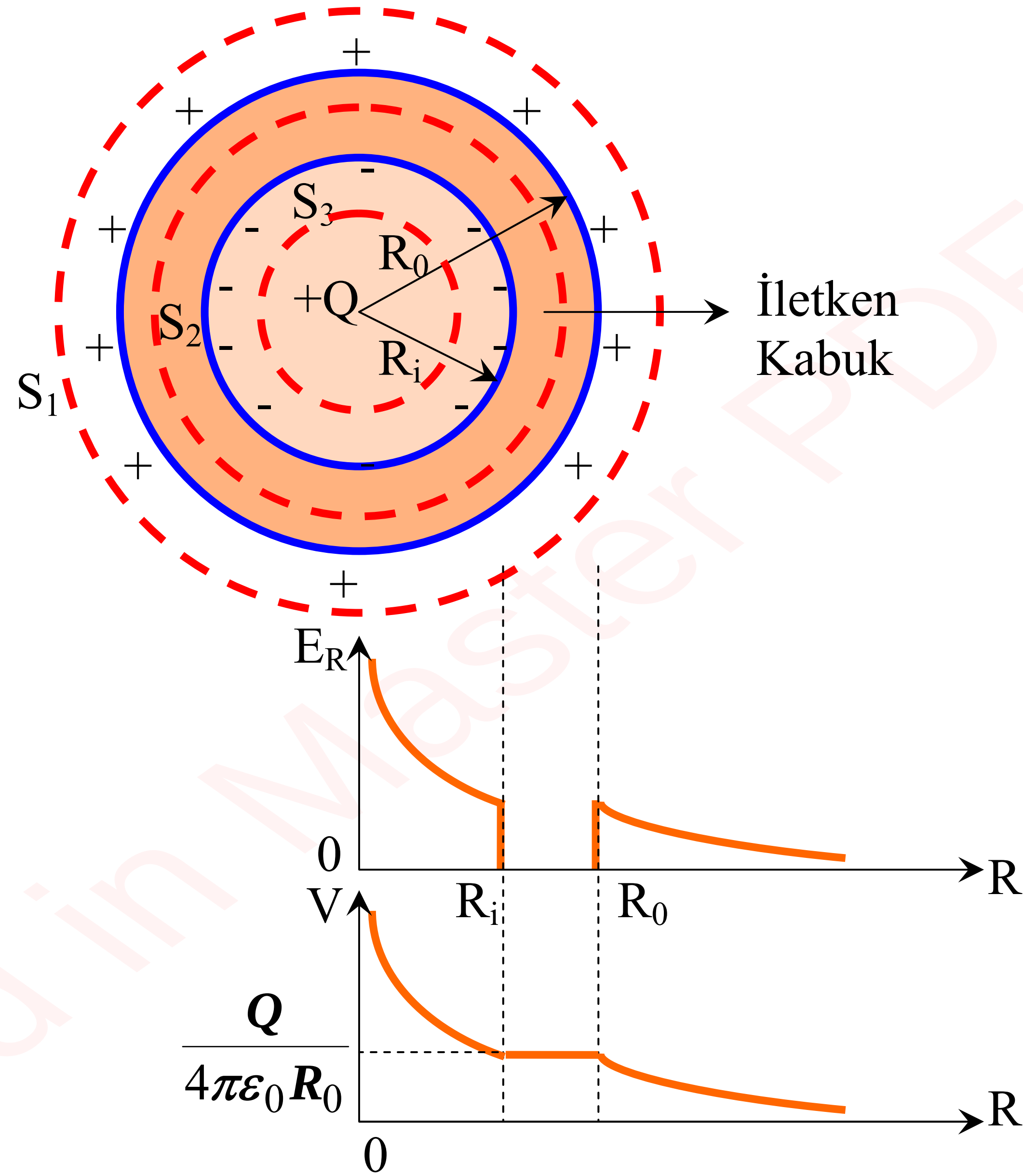
a) $R>R_o$ (Gauss yüzeyi S_1) bölgesi: Burada,

$$\oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{s} = E_{R1} 4\pi R^2 = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

$$E_{R1} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R^2} \qquad (2.68)$$

yazılabilir. Bu alan, iletken kabuk yokken, bir Q noktasal yükünün alanı ile aynıdır. Sonsuzdaki noktaya göre potansiyel,

$$V_1 = -\int_{\infty}^{R} (E_{R1}) dR = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R} \qquad (2.69)$$



Şekil.2.18: Bir iletken kabuğun merkezindeki +Q yükünün elektrik alan şiddeti ve potansiyel değişimi

dir.

b) $R_i \leq R \leq R_0$ (Gauss yüzeyi S_2) bölgesi: Denk.(2.65)'den dolayı,

$$E_{R2} = 0 \qquad (2.70)$$

dir. Diğer taraftan, iletken kabuk içinde $\rho = 0$ olduğundan ve S_2 yüzeyi içinde kalan toplam yük miktarının sıfır olması gerektiğinden dolayı, $R=R_i$'deki iç kabuk yüzeyinde (-Q)'ya eşit miktarda negatif yükün; $R=R_o$'daki dış kabuk yüzeyinde de (+Q)'ya eşit miktarda bir pozitif yükün indüklenmesi gerekir. İletken kabuk bir eşpotansiyel cisimdir. Bu yüzden,

$$V_2 = V_1\Big|_{R=R_0} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R_0} \qquad (2.71)$$

yazılabilir.

c) $R<R_i$ (Gauss yüzeyi S_3) bölgesi: Gauss kanunu uygulanırsa, E_{R3} alanının, birinci bölgede elde edilen Denk.(2.68) ile aynı olduğu görülür. Buna göre,

$$E_{R3} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R^2} \tag{2.72}$$

yazılabilir. Bu bölgedeki potansiyel ise,

$$V_3 = -\int E_{R3} dR + C = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R} + C$$

dir. Burada, integrasyon sabiti C, $R=R_i$'deki V_3 potansiyeli Denk.(2.71) deki V_2'ye eşitlenerek belirlenir. Bu durumda,

$$C = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R_0} - \frac{1}{R_i}\right)$$

ve

$$V_3 = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R_0} - \frac{1}{R_i}\right) \tag{2.73}$$

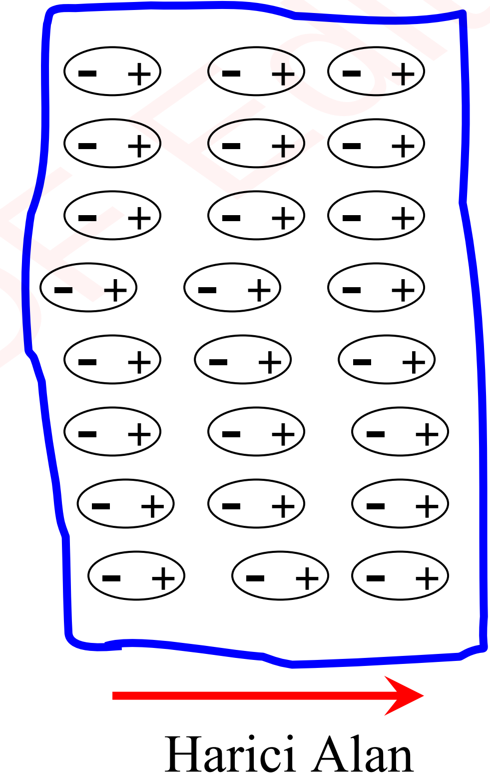
elde edilir. Üç bölgedeki E_R ve V'nin R'ye göre değişimleri Şekil.2.18b ve c'de verilmiştir.

****

2.7. ELEKTROSTATİK ALANDAKİ DİELEKTRİKLER

İdeal dielektriklerde serbest yükler bulunmaz. Bir dielektrik madde, bir elektrik alan içine yerleştirilirse, iletkenlerdeki gibi yüzeye doğru hareketlenen ve iç tarafta yük yoğunluğu ile elektrik alanı sıfır yapan hiçbir indüklenmiş serbest yük bulunmaz. Ancak, dielektriklerde bağlı yükler bulunduğundan, dielektriklerin, içine yerleştirildikleri elektrik alanı etkilemediği de söylenemez. Bütün **maddesel ortamlar, pozitif yüklü bir çekirdek ile bu çekirdek etrafındaki negatif yüklü elektronlardan oluşur**. Her ne kadar, dielektrik molekülleri, makroskobik anlamda, nötr ise de; **dışardan bir elektrik alanın uygulanması, her yüklü parçacığa bir kuvvetin etki etmesine neden olur ve sonuçta, pozitif ve negatif yüklerin zıt yönlerde hareketi meydana gelir**. Bu yer değiştirmeler, atomik boyutlara göre küçük olmalarına rağmen, dielektrik maddenin kutuplanmasına ve elektrik dipollerin oluşmasına yol açar (Şekil.2.19).

Elektrik dipollerin elektrik potansiyeli ve elektrik alan şiddeti sıfır olamayacağına göre; indüklenmiş elektrik dipoller, dielektrik maddenin iç ve dış taraflarındaki elektrik alanını değiştirecektir.



Şekil.2.19: Kutuplanmış dielektrik ortam kesiti

Bazı dielektrik molekülleri, harici kutuplama alanı olmasa dahi, daimi dipol momentlerine sahiptir. Bu moleküller, genellikle, iki veya daha fazla farklı atomlardan oluşur ve bunlara, polar olmayan moleküllerin (yani, daimi dipol momentlerine sahip olmayan moleküllerin) aksine, **polar moleküller** denir. Polar moleküllerin dipol momentleri, 10^{-30} (C.m) mertebesindedir. **Harici alan yoksa**, polar dielektrikteki her bir dipol rasgele yönlenir ve makroskobik olarak, net dipol momenti sıfır olur. Uygulanan harici elektrik alan, her dipole bir tork uygulayacak ve dipolleri, Şekil.2.19'dakine benzer şekilde, sıraya sokacaktır.

2.7.1. KUTUPLANMIŞ DİELEKTRİKLERİN EŞDEĞER YÜK DAĞILIMLARI

İndüklenmiş dipollerin makroskobik etkisini analiz etmek için,

$$\vec{P} = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\sum_{k=1}^{n\Delta V} \vec{P}_k}{\Delta V} \quad (\text{C/m}^2) \qquad (2.74)$$

ile bir **polarizasyon (kutuplanma) vektörü** ($\vec{P}$) tanımlanır. Burada, n birim hacimdeki atom sayısıdır. Denk.(2.74)'ün payı, çok küçük bir Δv hacminde bulunan indüklenmiş dipol momentlerinin vektörel toplamını gösterir. $\vec{P}$ **vektörü, elektrik dipol momentinin hacimsel yoğunluğudur**, dv' hacim elemanının dipol momenti $d\vec{p}$, $d\vec{p} = \vec{P}dv'$ şeklindedir ve bu,

$$dV = \frac{\vec{P} \cdot \hat{R}}{4\pi\varepsilon_0 R^2} dv' \qquad (2.75)$$

gibi bir elektrostatik potansiyel oluşturur (bkz.Denk.(2.48)). Dielektriğin V' hacmi üzerinden integral alınarak, **kutuplanmış dielektrik potansiyeli**,

$$V=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\iiint_{V'}\frac{\vec{P}\cdot\hat{R}}{R^2}dv' \qquad (2.76)$$

şeklinde elde edilir. Burada R, dv' hacim elemanının sabit bir gözlem noktasına uzaklığıdır. Kartezyen koordinatlar sisteminde,

$$R^2=(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2 \qquad (2.77)$$

dir ve 1/R'nin (') işaretli gözlem noktasının koordinatlarına göre gradyenti,

$$\nabla'\left(\frac{1}{R}\right)=\frac{\hat{R}}{R^2} \qquad (2.78)$$

dir. Böylece, Denk.(2.76),

$$V=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\iiint_{V'}\vec{P}\cdot\nabla'\left(\frac{1}{R}\right)dv' \qquad (2.79)$$

şeklinde yazılabilir. Burada, $\vec{A}=\vec{P}$ ve f=1/R olmak üzere,

$$\nabla'\cdot(f\,\vec{A})=f\,\nabla'\cdot\vec{A}+\vec{A}\cdot\nabla' f \qquad (2.80)$$

vektörel eşitliği kullanılarak, Denk.(2.79) ile verilen eşitlik,

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\iiint_{V'} \nabla' \cdot \left(\frac{\vec{P}}{R}\right) dv' - \iiint_{V'} \frac{\nabla' \cdot \vec{P}}{R} dv'\right] \tag{2.81}$$

şeklinde yazılabilir. Bu denklemin sağındaki ilk hacim integrali, diverjans teoremi ile kapalı yüzey integraline dönüştürülebilir. Böylece,

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\oiint_{S'} \frac{\vec{P} \cdot \hat{n}'}{R} ds' + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\iiint_{V'} \frac{\left(-\nabla' \cdot \vec{P}\right)}{R} dv' \tag{2.82}$$

elde edilir. Burada $\hat{n}'$, dielektriğin yüzey elemanı ds''ne dik ve bu yüzeyden dışarı doğru yönlenmiş birim vektördür. Denk.(2.82)'nin sağındaki iki integralin Denk.(2.57) ile verilen $V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\iint_{S'} \frac{\rho_s}{R} ds'$ ve (2.56) ile verilen $V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\iiint_{V'} \frac{\rho}{R} dv'$ eşitlikleri ile karşılaştırılması halinde, kutuplanmış bir dielektriğin elektrik potansiyeli (ve bundan dolayı da, elektrik alan şiddeti), yoğunlukları,

$$\rho_{ps} = \vec{P} \cdot \hat{n} \tag{2.83}$$

$$\rho_p = -\nabla \cdot \vec{P} \tag{2.84}$$

ile verilen **yüzeysel ve hacimsel yük dağılımları**nın katkılarından hesaplanabilir. Bu denklemler sadece kaynak noktasını ihtiva ettiği için, $\hat{n}$ ve ∇ vektörlerinin üzerindeki (') işareti basitlik amacı ile atılmıştır. $\rho_{ps} = \vec{P} \cdot \hat{n}$ ve $\rho_p = -\nabla \cdot \vec{P}$ şeklinde verilen yük yoğunluklarına, **kutuplanma (polarizasyon) yük yoğunlukları veya bağlı-yük yoğunlukları** denir. Başka bir deyişle; alan hesaplarında, kutuplanmış bir dielektrik yerine, bir eşdeğer yüzeysel kutuplanma yük yoğunluğu ρ_{ps} ve bir eşdeğer hacimsel kutuplanma yük yoğunluğu yerleştirilebilir. Bu durumda,

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\oiint_{S'} \frac{\rho_{ps}}{R} ds' + \iiint_{V'} \frac{\rho_p}{R} dv'\right] \tag{2.85}$$

yazılabilir.

$\rho_{ps} = \vec{P} \cdot \hat{n}$ ve $\rho_p = -\nabla \cdot \vec{P}$ eşitlikleri, bir vektörel bağıntı yardımı ile matematiksel olarak türetilmiş olsa bile, yük dağılımları için fiziksel bir açıklama da sağlanabilir. Şekil.2.19'dan açıkça görülmektedir ki; kutuplanma yönüne paralel olmayan

yüzeyler üzerinde, benzer şekilde yönlenmiş dipollerin uç yükleri mevcuttur. Kutuplanmamış (nonpolar) bir dielektriğin hayali Δs yüzey elemanını göz önüne alalım. Δs yüzey elemanına dik olarak harici bir elektrik alanın uygulanması durumunda, bağlı yükler birbirlerinden d kadar uzaklaşırlar. Pozitif yük (+q) alan yönünde d/2 kadar ve negatif yük (-q) alana ters yönde yine d/2 kadar hareket ederler. **Alan yönünde, Δs yüzeyinden geçen net toplam yük ΔQ, $nqd(\Delta s)$ kadardır**. Burada n, birim hacimdeki molekül sayısıdır. Harici alan Δs yüzeyine dik değilse, $\hat{n}$ yönünde bağlı yükler arasındaki uzaklık, $\vec{d} \cdot \hat{n}$ ve

$$\Delta Q = nq(\vec{d} \cdot \hat{n})(\Delta s) \tag{2.86}$$

olacaktır. Ancak, birim hacimdeki dipol momentini ifade eden $nq\vec{d}$, kutuplanma vektörü $\vec{P}$'nin tanımıdır. Bu nedenle,

$$\Delta Q = \vec{P} \cdot \hat{n}(\Delta s) \tag{2.87}$$

ve $\rho_{ps} = \vec{P} \cdot \hat{n}$ eşitliğinde verildiği gibi,

$$\rho_{ps} = \frac{\Delta Q}{\Delta s} = \vec{P} \cdot \hat{n}$$

yazılabilir. Burada $\hat{n}$'nin daima dışarı doğru yönelmiş yüzeye dik birim vektör olduğu unutulmamalıdır. **Son bağıntı, Şekil.2.19'daki yüzeyin sağ tarafında pozitif yüzeysel yük ve sol tarafında negatif yüzeysel yük verir**.

Bir V hacmini sınırlayan S yüzeyi için, kutuplanmanın sonucu olarak, V hacminden dışarı akan net toplam yük Denk.(2.87) ile verilen $\Delta Q = \vec{P} \cdot \hat{n}(\Delta s)$ eşitliğinin integre edilmesi ile elde edilir. V hacmi içinde kalan net yük, bu integralin negatifine eşittir. Buna göre,

$$Q = -\oint\!\!\!\oint_S \vec{P} \cdot \hat{n} ds = \iiint_V \left(-\nabla \cdot \vec{P}\right) dv = \iiint_V \rho_p dv \qquad (2.88)$$

yazılabilir. Bu denklem, Denk.(2.84)'deki $\rho_p = -\nabla \cdot \vec{P}$ hacimsel yük yoğunluğu ifadesini verir. Bundan dolayı, $\vec{P}$'nin diverjansı sıfır olmadığı sürece, kutuplanmış dielektrik parçasının yüklenmiş olduğu görülür. Ancak, elektriksel olarak nötr olan

bir dielektrik madde ile başlandığından, kutuplanmadan sonra maddenin toplam yükü sıfır olmalıdır. Bu durum,

$$\text{Toplam Yük} = \oint\!\!\oint_S \rho_{ps} ds + \iiint_V \rho_p dv = \oint\!\!\oint_S \vec{P} \cdot \hat{n} ds - \iiint_V \nabla \cdot \vec{P} dv = 0 \tag{2.89}$$

şeklinde ispatlanabilir. Burada, diverjans teoremi kullanılmıştır.

2.8. ELEKTRİK AKI YOĞUNLUĞU VE DİELEKTRİK SABİTİ

Kutuplanmış dielektrik ρ_p hacimsel yük yoğunluğu oluşturacağından, dielektrik içinde bilinen bir kaynak dağılımının elektrik alanının serbest uzaydakinden farklı olması beklenir. Özellikle, $\nabla \cdot \vec{E} = \rho / \varepsilon_0$ şeklindeki diverjans bağıntısının, ρ_p'nin etkisini de içerecek şekilde, değiştirilmesi gerekir. Buna göre;

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{1}{\varepsilon_0}(\rho + \rho_p) \tag{2.90}$$

yazılabilir. Denk.(2.84) ile verilen $\rho_p = -\nabla \cdot \vec{P}$ eşitliği burada kullanılırsa,

$$\nabla \cdot \left(\varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}\right) = \rho \tag{2.91}$$

elde edilir. Şimdi, **elektrik akı yoğunluğu veya elektrik deplasmanı** olarak adlandırılan ve,

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P} \quad (\text{C/m}^2) \qquad (2.92)$$

şeklinde verilen yeni bir alan niceliği tanımlanacaktır. $\vec{D}$ **vektörünün kullanılması, kutuplanma vektörü $\vec{P}$ veya kutuplanma yük yoğunluğu ρ_p ile uğraşmaksızın, serbest yük dağılımı ile elektrik alan arasında bir diverjans bağıntısının yazılabilmesini mümkün kılar**. Denk.(2.92) eşitliği Denk.(2.91)'de kullanılırsa,

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho \qquad (2.93)$$

şeklinde yeni bir denklem elde edilir. Burada ρ, hacimsel serbest yük yoğunluğudur. Denk.(2.93) ve (2.5) ile verilen $\nabla \times \vec{E} = 0$ denklemi, **herhangi bir ortamdaki elektrostatik alanın** temel diferansiyel denklemleridir. Serbest uzayın dielektrik katsayısı ε_0'ın bu iki denklemde gözükmediğine dikkat ediniz.

Denk.(2.93)'ün her iki tarafının hacim integrali alınarak,

$$\iiint_V \nabla \cdot \vec{D} dv = \iiint_V \rho dv \tag{2.94}$$

veya

$$\oiint_S \vec{D} \cdot d\vec{s} = Q \quad \text{(C)} \tag{2.95}$$

şeklindeki integral formunda denklemler elde edilir. **Denk.(2.95), Gauss kanununun başka bir şekli olup,** **bu denkleme göre;** **herhangi bir kapalı yüzeyden dışarı çıkan toplam elektrik deplasmanı akısı (veya basitçe, yüzeyden dışarı çıkan elektrik akısı), yüzey içinde kalan serbest yüklerin toplamına eşittir**. Bilindiği gibi; simetri şartlarının geçerli olduğu durumlarda, bilinen bir yük dağılımının elektrik alanının belirlenmesinde, Gauss kanunu oldukça kullanışlıdır.

Ortamın dielektrik özellikleri lineer ve izotropik ise, kutuplanma elektrik alan şiddeti ile doğru orantılıdır ve orantı sabiti, alanın yönünden bağımsızdır. χ_e, **elektrik suseptibilite olarak adlandırılan boyutsuz bir büyüklük olmak üzere**,

$$\vec{P} = \varepsilon_0 \chi_e \vec{E} \quad (2.96)$$

dir. Eğer χ_e, **elektrik alan E'den bağımsız ise dielektrik ortama lineer ve** χ_e, **uzayın koordinatlarından bağımsız ise homojen ortam denir**. Denk.(2.96)'daki eşitlik, Denk.(2.92) ile verilen $\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$ denkleminde kullanılırsa,

$$\vec{D} = \varepsilon_0 (1 + \chi_e) \vec{E} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \vec{E} = \varepsilon \vec{E} \quad \text{(C/m)} \quad (2.97)$$

elde edilir. Burada,

$$\varepsilon_r = 1 + \chi_e = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} \quad (2.98)$$

dir. ε_r, **bağıl dielektrik sabiti** veya ortamın dielektrik sabiti olarak adlandırılan boyutsuz bir sabittir, $\varepsilon = \varepsilon_0 \varepsilon_r$ katsayısı, **ortamın mutlak dielektrik sabiti** (veya kısaca, dielektrik katsayısı da denir)'dir ve birimi, Farad/metre (F/m)'dir. Havanın dielektrik sabiti, 1.00059 dur. Bu yüzden, havanın dielektrik sabiti genellikle, serbest uzayın dielektrik katsayısı ile aynı alınır.

ε_r'nin uzayın koordinatlarının fonksiyonu olabileceğine dikkat ediniz. ε_r**, konumdan bağımsız ise, ortamın homojen olduğu söylenir**. **Lineer, homojen ve izotropik bir ortama basit ortam denir. Bir basit ortamın bağıl dielektrik katsayısı, sabittir.**

****

Örnek 2.11: İç yarıçapı R_i, dış yarıçapı R_o olan küresel dielektrik kabuğun merkezinde, pozitif Q noktasal yükü bulunmaktadır. Kabuğun dielektrik sabiti ε_r olduğuna göre; $\vec{E}, V, \vec{D}$ ve $\vec{P}$ niceliklerini R'nin fonksiyonu olarak belirleyiniz.

Çözüm 2.11: Bu problemin geometrisi, Örnek.2.10'da verilen geometri ile aynıdır. İletken kabuk yerine dielektrik kabuk yerleştirilmiş olmasına rağmen, çözüm yolu birbirine benzer. Küresel simetriden dolayı, (a) $R > R_0$, (b) $R_i \le R \le R_0$ ve (c) $R < R_i$ bölgelerinde $\vec{E}$ ve $\vec{D}$'nin bulunması için, Gauss kanunu kullanılabilir. V potansiyeli $\vec{E}$'nin integralinin negatifinden, $\vec{P}$ kutuplanma vektörü ise,

$$\vec{P} = \vec{D} - \varepsilon_0 \vec{E} = \varepsilon_0 (\varepsilon_r - 1) \vec{E} \qquad (2.99)$$

bağıntısından hesaplanabilir. $\vec{E}$, $\vec{D}$ ve $\vec{P}$ vektörleri sadece radyal bileşenlere sahiptir. Gauss yüzeylerini göstermeyen Şekil.2.20a'daki geometri gözönüne alınarak, üç bölgedeki çözüm aşağıdaki gibi elde edilebilir.

a) $R>R_0$ bölgesi: Bu bölgedeki durum, Örnek.2.10'daki ile tamamen aynıdır. Buna göre, Denk.(2.68) ve (2.69)'dan,

$$E_{R1} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R^2}$$

$$V_1 = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R}$$

elde edilir. Denk.(2.97) ve (2.99)'dan,

$$\vec{D} = \varepsilon_0(1+\chi_e)\vec{E} = \varepsilon_0\varepsilon_r\vec{E} = \varepsilon\vec{E} \qquad D_{R1} = \varepsilon_0 E_{R1} = \frac{Q}{4\pi R^2} \qquad (2.100)$$

ve

$$\vec{P} = \vec{D} - \varepsilon_0\vec{E} = \varepsilon_0(\varepsilon_r - 1)\vec{E} \qquad P_{R1} = 0 \qquad (2.101)$$

elde edilir.

b) $R_i \leq R \leq R_0$ bölgesi: Bu bölgede, doğrudan doğruya Gauss kanunu uygulanarak,

$$E_{R2} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r R^2} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon R^2} \qquad (2.102)$$

$$D_{R2} = \frac{Q}{4\pi R^2} \qquad (2.103)$$

$$\vec{P} = \vec{D} - \varepsilon_0\vec{E} = \varepsilon_0(\varepsilon_r - 1)\vec{E} \qquad P_{R2} = \left(1 - \frac{1}{\varepsilon_r}\right)\frac{Q}{4\pi R^2} \qquad (2.104)$$

Elde edilir. D_{R2}'nin D_{R1} ile aynı ifadeye sahip olduğuna ve E_R ile P_R'nin $R=R_o$'da süreksiz olduğuna dikkat ediniz. Bu yüzden, bu bölgede,

$$V_2 = -\int_{\infty}^{R_0} E_{R1}dR - \int_{R_0}^{R} E_{R2}dR = V_1\Big|_{R=R_0} - \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\int_{R_0}^{R}\frac{1}{R^2}dR$$

$$= \frac{Q}{4\pi\varepsilon_o}\left[\left(1 - \frac{1}{\varepsilon_r}\right)\frac{1}{R_0} + \frac{1}{\varepsilon_r R}\right]$$

(2.105)

elde edilir.

c) $R<R_i$ bölgesi: Bu bölgedeki ortam, $R>R_0$ bölgesindeki ortam ile aynı olduğundan, Gauss yasasının uygulanması ile her iki bölge için,

$$E_{R3} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R^2}$$

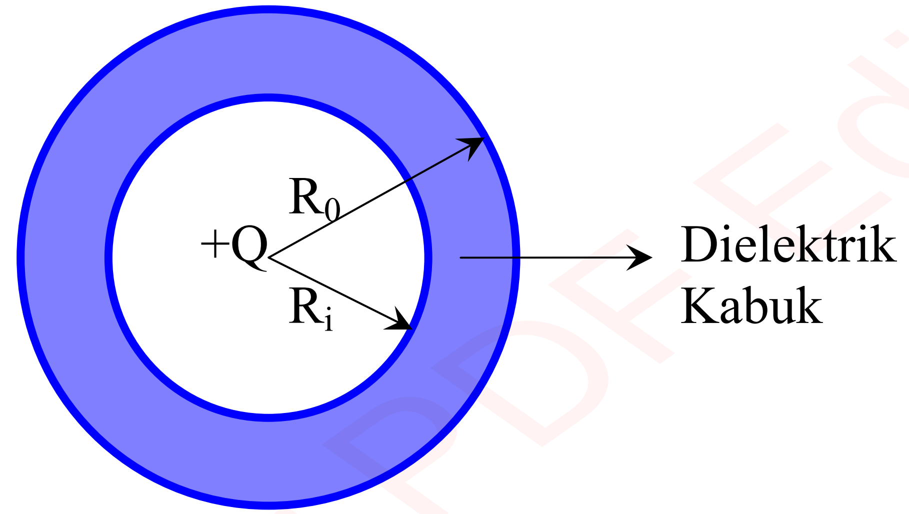
$$D_{R3} = \frac{Q}{4\pi R^2}$$

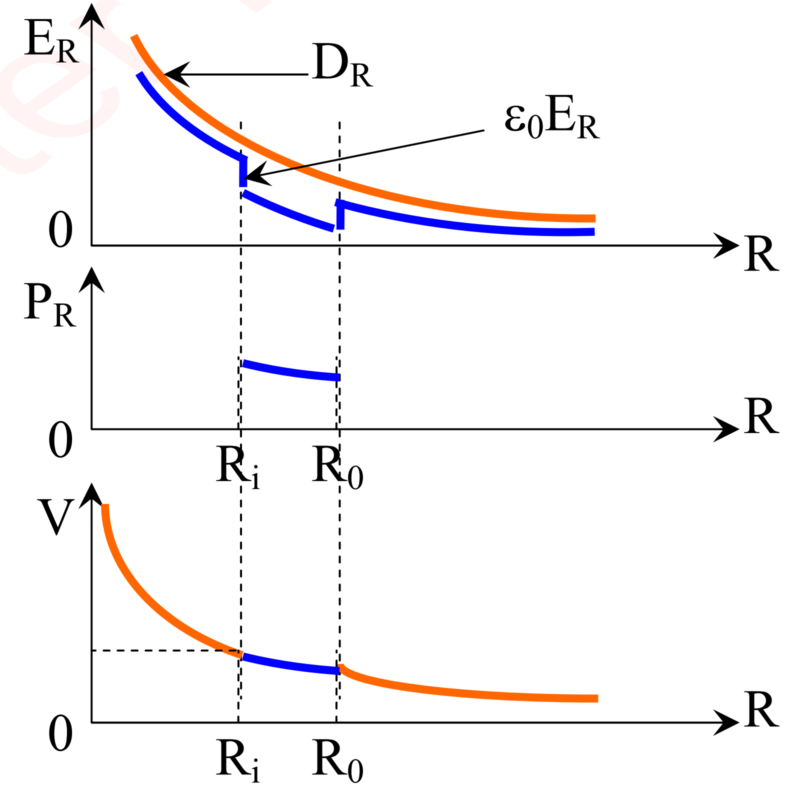
$$P_{R3} = 0$$

ifadeleri elde edilir. V_3 potansiyelinin bulunabilmesi için, E_{R3}'ün negatif çizgisel integrali V_2'ye eklenmelidir. Buna göre,

$$V_3 = V_2\Big|_{R=R_i} - \int_{R_i}^{R} E_{R3}\,dR = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\left(1-\frac{1}{\varepsilon_r}\right)\frac{1}{R_0} - \left(1-\frac{1}{\varepsilon_r}\right)\frac{1}{R_i} + \frac{1}{R}\right] \qquad (2.106)$$

yazılabilir.





Şekil.2.20: Bir dielektrik kabuğun merkezindeki +Q noktasal yükünün alan değişimleri

$\varepsilon_0 E_R$ ve D_R'nin R'ye göre değişimleri Şekil.2.20b'de verilmiştir. $(D_R - \varepsilon_0 E_R)$ farkı, P_R'ye eşittir ve Şekil.2.20c'de gösterilmiştir. Şekil.2.20d'deki V'nin grafiği, üç bölgedeki V_1, V_2 ve V_3 'ün toplam grafiğidir. D_R'nin, bir ortamdan diğerine geçerken, ani olarak değişmeyen sürekli bir eğri olduğuna ve $\mathbf{P_R}$'nin sadece, dielektrik ortamda mevcut olduğuna dikkat ediniz. Şekil.2.20b ve c'deki grafikleri, Şekil.2.18b ve c'deki grafiklerle karşılaştırmakta fayda vardır.

Denk.(2.83) ve (2.84)'de verilen $\rho_{ps} = \vec{P} \cdot \hat{n}$ ve $\rho_p = -\nabla \cdot \vec{P}$ denklemleri iç kabuk yüzeyi üzerinde,

$$\rho_{ps}\Big|_{R=R_i} = \vec{P} \cdot (-\hat{R})\Big|_{R=R_i} = -P_{R2}\Big|_{R=R_i} = -\left(1 - \frac{1}{\varepsilon_r}\right)\frac{Q}{4\pi R_i^2} \qquad (2.107)$$

dış kabuk yüzeyi üzerinde,

$$\rho_{ps}\Big|_{R=R_o} = \vec{P} \cdot \hat{R}\Big|_{R=R_o} = P_{R2}\Big|_{R=R_o} = \left(1 - \frac{1}{\varepsilon_r}\right)\frac{Q}{4\pi R_o^2} \qquad (2.108)$$

ve

$$\nabla . \vec{A} = \frac{1}{R^2}\frac{\partial}{\partial R}(R^2 A_R) + \frac{1}{R\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(A_\theta \sin\theta) + \frac{1}{R\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}(A_\phi)$$

olduğundan,

$$\rho_p = -\nabla \cdot \vec{P} = -\frac{1}{R^2}\frac{\partial}{\partial R}(R^2 P_{R2}) = 0 \qquad (2.109)$$

elde edilir. Denk.(2.107), (2.108) ve (2.109) ile verilen ifadeler, dielektrik kabuğun iç tarafında, net hacimsel kutuplanma yükünün olmadığını göstermektedir. Ancak, iç yüzeyde negatif yüzeysel kutuplanma yükleri, dış yüzeyde pozitif yüzeysel kutuplanma yükleri mevcuttur. **Bu yüzeysel yükler, radyal olarak içe doğru yönlenmiş elektrik alan şiddeti oluştururlar. Bu durumda, merkezdeki +Q noktasal yükünün ikinci bölgede oluşturduğu $\vec{E}$ -alanı küçülür.**

****

2.8.1. DİELEKTRİK DAYANIMI

Elektrik alanın, bir dielektrik maddedeki bağlı yüklerin küçük yer değiştirmelerine sebep olduğu ve sonuçta, kutuplanmanın meydana geldiği açıklanmıştı. Eğer, uygulanan elektrik alan çok şiddetli ise, moleküler yapıda daimi deplasmanlar oluşur ve elektronlar, moleküllerden tamamen ayrılırlar. Böylece, serbest yükler ortaya çıkar. Bunun sonucunda, madde iletken olur ve büyük akımlar oluşabilir. **Bu olaya, dielektrik delinmesi (veya bozulması) denir. Bir dielektrik maddenin delinmeden dayanabildiği maksimum elektrik alan şiddetine maddenin dielektrik dayanımı denir.** Yaygın bazı maddelerin dielektrik dayanımları Tablo.2.1'de verilmiştir. Bir maddenin dielektrik dayanımı, dielektrik sabiti ile asla karıştırılmamalıdır.

Atmosferik basınçta, havanın dielektrik dayanımı 3kV/mm'dir. Elektrik alan şiddeti, bu değeri aşarsa, hava delinmeye başlar, ağır iyonizasyon oluşur ve bunu, kıvılcım (elektrik deşarjı) takip eder. Yük, sivri noktalarda yoğunlaşma eğilimi

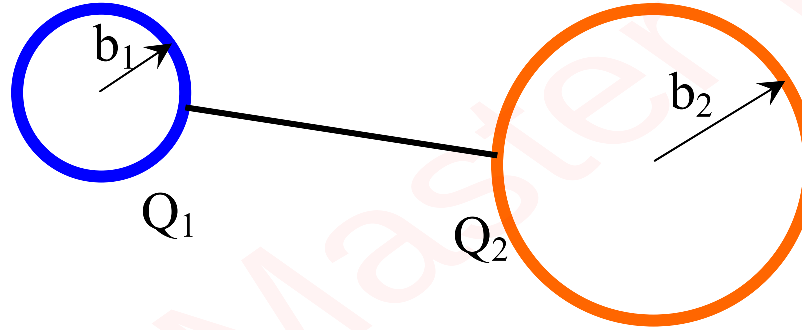
gösterir. $E_n = \rho_s / \varepsilon_0$ eşitliğinden dolayı sivri noktaların civarındaki elektrik alan şiddeti, eğriliği küçük olan bir yüzey üzerindeki bir noktada var olan elektrik alan şiddetinden daha büyüktür. Bu, paratoner'in çalışma prensibidir. Paratoner yoluyla boşalma, nesneler yoluyla zarar verici boşalmayı önler.

Tablo.2.1: Bazı maddelerin dielektrik dayanımı

Madde	Dielektrik Dayanım (V/m)
Hava (Atmosferik basınçta)	$3x10^6$
Mineral yağı	$15x10^6$
Polystyrene	$20\ x10^6$
Lastik	$25\ x10^6$
Cam	$30\ x10^6$
Mika	$200\ x10^6$

****

Örnek 2.12: Yarıçapları b_1 ve b_2 olan ($b_2>b_1$), iletken bir telle birbirine bağlı iki küresel iletkeni gözönüne alalım. İletkenler arasındaki mesafe, b_2'ye göre çok büyük olsun. Bu durumda, küresel iletkenler üzerindeki yüklerin düzgün olarak dağıldığı düşünülebilir. Küreler üzerinde biriken toplam yük miktarı Q olduğuna göre; (a) İki küre üzerindeki yükleri, (b) Küresel yüzeylerdeki elektrik alan şiddetini, bulunuz.



Şekil.2.21: Birbirine bağlı iletken küreler

Çözüm 2.12:

a) Bu problemin çözümü için, Şekil.2.21'i gözönüne alalım. Küresel iletkenler aynı potansiyelde olduğundan,

$$\frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 b_1} = \frac{Q_2}{4\pi\varepsilon_0 b_2}$$

veya

$$\frac{Q_1}{b_1} = \frac{Q_2}{b_2}$$

elde edilir. Bundan dolayı, küreler üzerindeki yükler, kürelerin yarıçapları ile doğru orantılıdır. Fakat,

$$Q_1 + Q_2 = Q$$

olduğundan,

$$Q_1 = \frac{b_1}{b_1 + b_2} Q$$

ve

$$Q_2 = \frac{b_2}{b_1 + b_2} Q$$

elde dilir.

b) İletken küre yüzeylerindeki elektrik alan şiddetleri,

$$E_{1n} = \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 b_1^{\,2}} \quad , \quad E_{2n} = \frac{Q_2}{4\pi\varepsilon_0 b_2^{\,2}}$$

dir. Böylece,

$$\frac{E_{1n}}{E_{2n}} = \left(\frac{b_2}{b_1}\right)^2 \frac{Q_1}{Q_2} = \frac{b_2}{b_1}$$

elde edilir. Görüldüğü gibi; elektrik alan şiddetleri, yarıçaplarla ters orantılı ve eğriliği daha büyük olan küçük küre yüzeyindeki elektrik alan daha büyüktür.

****

2.9. ELEKTROSTATİK ALANLARIN SINIR ŞARTLARI

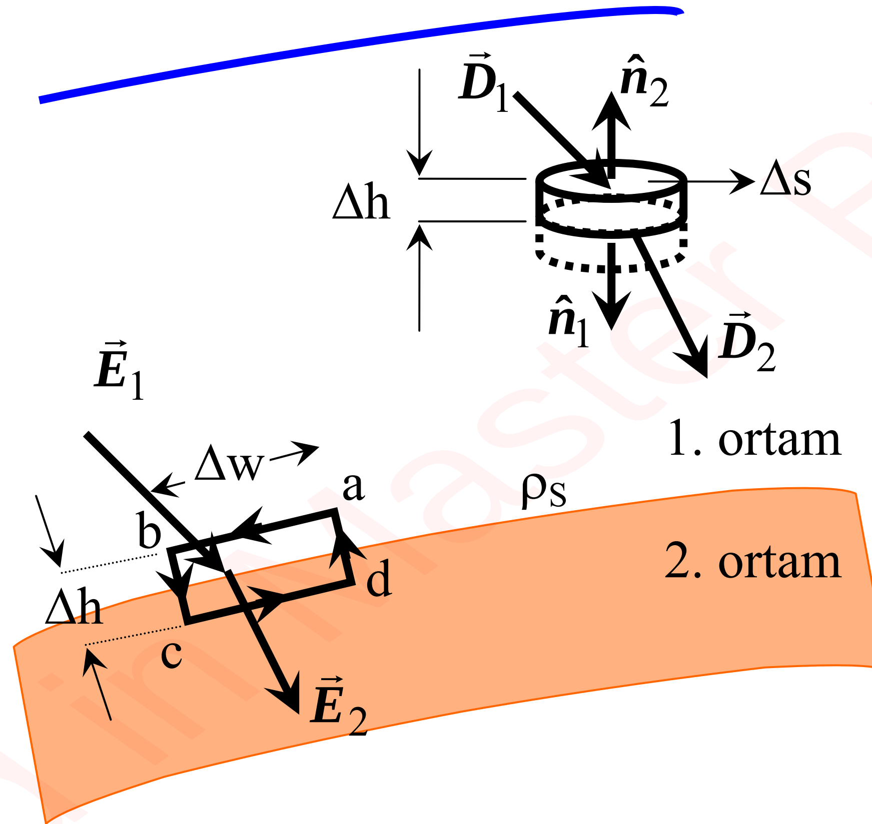
Genellikle, elektromanyetik problemler, fiziksel özellikleri farklı ortamları içerirler ve iki ortam sınırındaki alan büyüklükleri arasındaki bağıntıların bilinmesini gerektirirler. Örneğin, bir geçiş yüzeyinde $\vec{E}$ ve $\vec{D}$ vektörlerinin nasıl değiştiğini belirlemek isteyebiliriz. Bir iletken-serbest uzay sınırında sağlanması gereken sınır şartları, $E_t = 0$ ve $E_n = \rho_s / \varepsilon_0$ ile verilmişti. Şimdi, Şekil.2.22'de gösterildiği gibi, iki genel ortam arasındaki sınırı göz önüne alalım.

Her ikisi de sınıra paralel olan ve Δw'ya eşit, ab ve cd kenarları sırasıyla 1. ve 2. ortamda bulunan abcda yolunu oluşturalım. Süreksiz ortamları içeren bölgeler için geçerli olduğu kabul edilen Denk.(2.8) bağıntısı, bu yola uygulanabilir. Eğer, bc=da=Δh kenarlarının sıfıra yaklaştığı dikkate alınırsa, bu kenarların, yol etrafında yazılan $\vec{E}$'nin çizgisel integraline katkıları ihmal edilebilir. Böylece,

$$\int_{abcda} \vec{E} \cdot d\vec{l} = \vec{E}_1 \cdot \Delta\vec{w} + \vec{E}_2 \cdot (-\Delta\vec{w}) = E_{1t}\Delta w - E_{2t}\Delta w = 0$$

yazılabilir. Bu nedenle,

$$E_{1t} = E_{2t} \tag{2.110}$$



Şekil.2.22: İki ortam arasındaki sınır

dir. Bu eşitliğe göre; **bir $\vec{E}$-alanının teğetsel bileşeni bir sınır yüzeyinde süreklidir**. **Eğer ortamlardan biri iletken ise, Denk.(2.110) ile verilen ifade Denk.(2.66) ile verilen $E_t = 0$ eşitliğine indirgenmiş olur**. Birinci ve ikinci ortamların dielektrik sabitleri ε_1 ve ε_2 ise,

$$\frac{D_{1t}}{\varepsilon_1} = \frac{D_{2t}}{\varepsilon_2} \qquad (2.111)$$

elde edilir.

Bir sınırdaki alanların normal bileşenleri arasında bir bağıntı elde etmek için, üst yüzeyi 1. ortamda, alt yüzeyi 2. ortamda bulunan küçük bir kutu (bkz. Şekil.2.22) oluşturulur. Yüzeylerin alanı ΔS ve kutunun yüksekliği Δh da sıfıra gidebilecek küçüklükte olsun. Kutuya Gauss kanunu uygulanarak,

$$\oiint_S \vec{D}.d\vec{s} = \left(\vec{D}_1 \cdot \hat{n}_2 + \vec{D}_2 \cdot \hat{n}_1\right)\Delta S = \hat{n}_2 \cdot (\vec{D}_1 - \vec{D}_2)\Delta S = \rho_s \Delta S \qquad (2.112)$$

elde edilir. Burada, $\hat{n}_2 = -\hat{n}_1$'dir. **$\hat{n}_1$ ve $\hat{n}_2$ birim vektörleri, sırayla, 1. ve 2. ortamlara dik ve yüzeyden dışarı doğru yönlenmiş birim normal vektörlerdir**.

Denk.(2.112)'den,

$$\hat{n}_2 \cdot (\vec{D}_1 - \vec{D}_2) = \rho_s \qquad (2.113a)$$

veya

$$D_{1n} - D_{2n} = \rho_s \qquad (2.113b)$$

elde edilir. Burada, **referans birim normal vektör 2. ortamdan dışarı doğru yönlenmiştir.**

Denk.(2.113)2e göre; $\vec{E}$ **-alanının normal bileşeni, bir yüzeysel yükün mevcut olduğu sınır yüzeyinde süreksizdir. Süreksizlik miktarı, yüzeysel yük yoğunluğuna eşittir**. **Eğer, 2. ortam iletken ise,** $\vec{D}_2 = 0$ ve Denk.(2.113b),

$$D_{1n} = \varepsilon_1 E_{1n} = \rho_s \qquad (2.114)$$

olur. Bunun yanında, 1. ortam serbest uzay ise, bu eşitlik Denk.(2.67) ile aynı olur.

Sınırında serbest yük bulunmayan ($\rho = 0$) iki dielektrik söz konusu olursa,

$$D_{1n} = D_{2n} \tag{2.115}$$

veya

$$\varepsilon_1 E_{1n} = \varepsilon_2 E_{2n} \tag{2.116}$$

yazılabilir.

****

Örnek 2.13: Bağıl dielektrik sabiti $\varepsilon_r = 3.2$ olan bir dielektrik levha, serbest uzayda $\vec{E} = \hat{x}E_0$ şeklinde verilen düzgün elektrik alan içine dik olarak yerleştirilmiştir. Dielektrik madde içinde, $\vec{E}_i$, $\vec{D}_i$ ve $\vec{P}_i$ büyüklüklerini belirleyiniz.

Çözüm 2.13: Dielektrik levhanın, orjinal $\vec{E}$-alanını bozmadığını kabul edelim. Bu durum, Şekil.2.23'de gösterilmiştir. Sınır yüzeyleri elektrik alana dik olduğundan, sadece, dik alan bileşenlerinin göz önüne alınması gerekir. Ayrıca, serbest yükler yoktur. Sol taraftaki sınır yüzeyinde, $D_{1n} = D_{2n}$ ile verilen sınır şartı sebebiyle,

$$\vec{D}_i = \hat{x}D_i = \hat{x}D_0$$

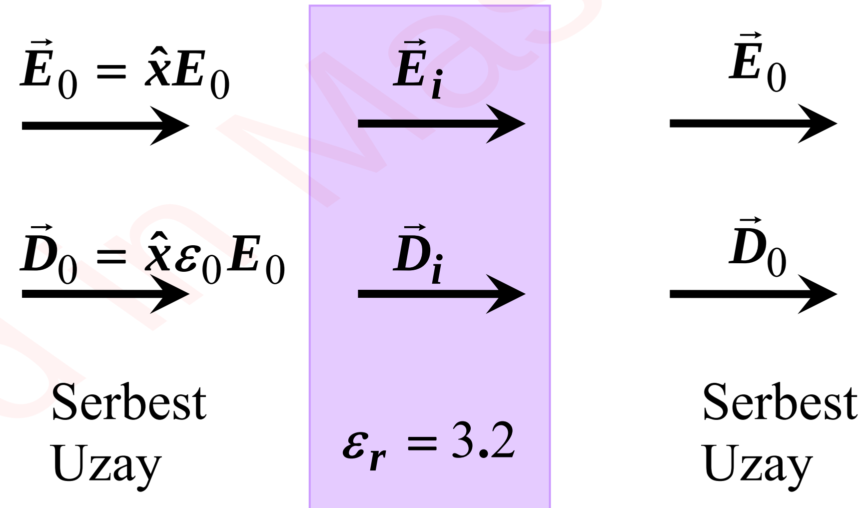
veya

$$\vec{D}_i = \hat{x}\varepsilon_0 E_0$$

yazılabilir. Sınıra dik elektrik akı yoğunluğunda bir değişim yoktur. Dielektrik levhanın iç tarafındaki elektrik alan şiddeti,

$$\vec{E}_i = \frac{1}{\varepsilon}\vec{D}_i = \frac{1}{\varepsilon_0\varepsilon_r}\vec{D}_i = \hat{x}\frac{E_0}{3.2}$$

dir. Levha dışındaki kutuplanma vektörü sıfırdır ($\vec{P}_0 = \mathbf{0}$). Levha içinde



Şekil.2.23: Düzgün elektrik alan içindeki dielektrik levha

$$\vec{P}_i = \vec{D}_i - \varepsilon_0 \vec{E}_i = \hat{x}\left(1 - \frac{1}{3.2}\right)\varepsilon_0 \vec{E}_0 = \hat{x}0.6875\varepsilon_0 E_0 \ , \ \ (\text{C/m}^2)$$

dir. Sağ taraftaki sınır yüzeyinde $D_{1n} = \varepsilon_1 E_{1n} = \rho_s$ ile verilen sınır şartının benzer şekilde uygulanması halinde, dielektrik levhanın sağ tarafında serbest uzaydaki orjinal $\vec{E}_0$ ve $\vec{D}_0$ elde edilecektir. Eğer, orjinal elektrik alan düzgün değilse, yani $\vec{E}_0 = \hat{x}E(y)$ ise, problemi tekrar çözünüz.

****

Örnek 2.14: Dielektrik sabitleri ε_1 ve ε_2 olan iki dielektrik ortam, Şekil.2.24'de gösterildiği gibi, yüksüz bir sınır ile birbirinden ayrılmıştır. 1. ortamda P_1 noktasındaki elektrik alan şiddetinin büyüklüğü E_1, yüzeyin normali ile yaptığı açı α_1 olduğuna göre; 2. ortamdaki P_2 noktasında, elektrik alan şiddetinin büyüklüğünü ve yönünü bulunuz.

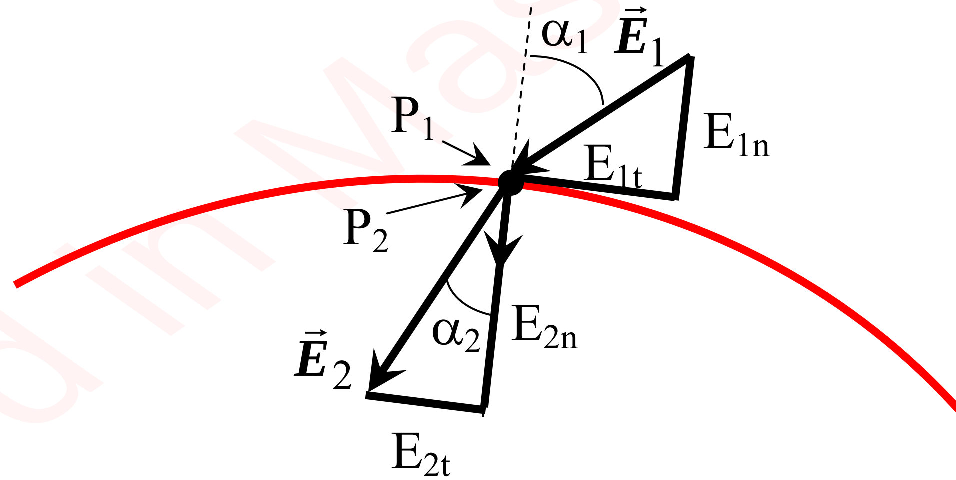
Çözüm 2.14: E_{2t} ve E_{2n} bilinmeyenlerini belirleyebilmek için, iki denklem gereklidir, E_{2t} ve E_{2n}, bulunduktan sonra, E_2, ve α_2 elde edilecektir. $E_{1t} = E_{2t}$ ve $D_{1n} = D_{2n}$ kullanılarak,

$$E_2 \sin\alpha_2 = E_1 \sin\alpha_1 \tag{2.117}$$

ve

$$\varepsilon_2 E_2 \cos\alpha_2 = \varepsilon_1 E_1 \cos\alpha_1 \tag{2.118}$$

elde edilir. Birinci denklem, ikinci ile bölünerek,



Şekil.2.24: İki dielektrik arasındaki sınır şartları

$$\frac{\tan\alpha_2}{\tan\alpha_1} = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} \tag{2.119}$$

bulunur. $\vec{E}_2$'nin büyüklüğü ise,

$$E_2 = \sqrt{E_{2t}^2 + E_{2n}^2} = \sqrt{(E_2 \sin\alpha_2)^2 + (E_2 \cos\alpha_2)^2}$$

$$= \left[(E_1 \sin\alpha_1)^2 + \left(\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} E_1 \cos\alpha_1 \right)^2 \right]^{1/2}$$

veya

$$= E_1 \left[\sin^2\alpha_1 + \left(\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} \cos\alpha_1 \right)^2 \right]^{1/2} \tag{2.120}$$

şeklinde edilir.

****

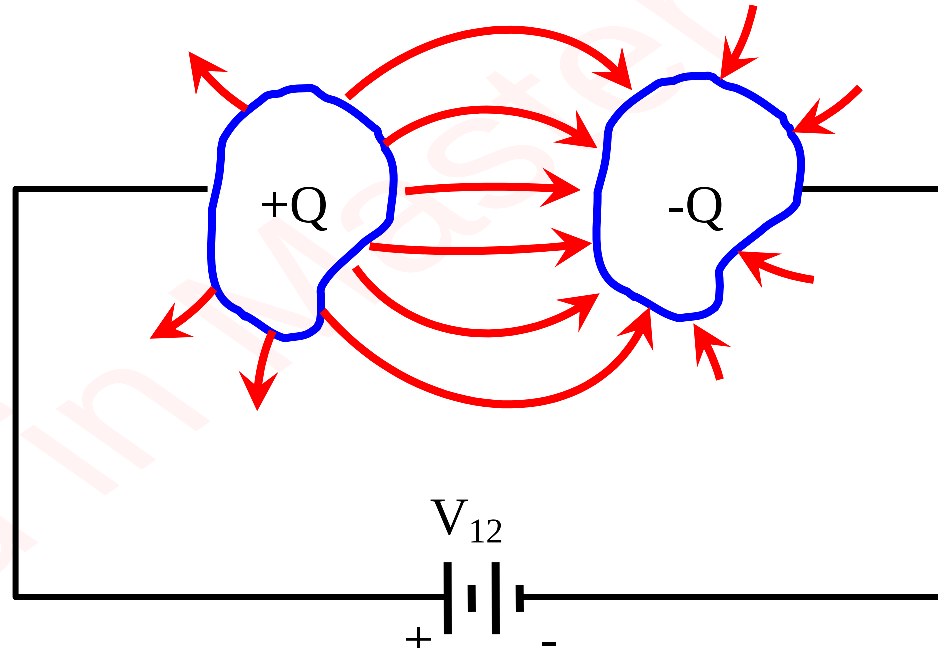
Şekil.2.24'ü göz önüne alarak, ε_1'in ε_2'den büyük mü yoksa küçük mü olduğunu belirleyiniz.

2.10. KAPASİTE VE KAPASİTÖRLER

Bölüm.2.6'dan anlaşılmaktadır ki; elektrostatik alan içindeki bir iletken bir eş-potansiyel maddedir ve iletken üzerinde biriken yükler, iletken içindeki elektrik alan sıfır oluncaya kadar, yüzey üzerinde dağılacaklardır. Bir Q noktasal yükünün potansiyeli V olsun. Statik durumda, iletkenin eş-potansiyel madde olarak kalması için yük dağılımı etkilenmeksizin, toplam yük miktarını k faktörü oranında artırmak, ancak, her yerde yüzeysel yük yoğunluğunu aynı oranda artırmakla mümkündür. Denk.(2.57) ile verilen $V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\iint_{S'}\frac{\rho_s}{R}ds'$ denklemine göre; **yalıtılmış bir iletkenin potansiyeli, iletken yüzeyindeki toplam yük miktarı ile doğru orantılıdır**. Bu durumu, V potansiyelinin k faktörü kadar artırılmasının $\vec{E} = -\nabla V$ alanını da aynı oranda artırmasından görmek mümkündür. Ancak, Denk.(2.67) ile verilen $\vec{E} = \hat{n}\rho_s / \varepsilon_0$ bağıntısından görülebileceği gibi; ρ_s ve dolayısıyla, Q toplam yük miktarı da k faktörü oranında artacaktır. Bundan dolayı, Q/V oranı sabit kalır ve

$$Q = CV \tag{2.121}$$

yazılabilir. Burada, **C orantı sabitine iletken maddenin kapasitesi denir**. **Kapasite, elektrik potansiyelindeki birim artış başına iletken maddeye eklenmesi gereken elektrik yüküdür**. Kapasite birimi, SI birim sisteminde, Coulomb/Volt veya Farad (F)'dır.



Şekil.2.25: İki iletkenli kapasitör

Aralarında serbest uzay veya bir dielektrik ortam bulunan iki iletkenden oluşan kapasitörün pratikteki önemi büyüktür. Şekil.2.25'de olduğu gibi, iletkenler keyfi şekillerde olabilir. İletkenler arasına bir DC voltaj kaynağı bağlanırsa, iletkenlerden birinde +Q, diğerinde -Q yükü oluşacak şekilde bir yük transferi meydana gelir. Pozitif yüklerden başlayıp, negatif yüklerde sona eren elektrik alan çizgilerinin bazıları Şekil.2.25'de gösterilmiştir. **Alan çizgilerinin, eş-potansiyel yüzey olan iletken yüzeylerine dik olduğuna dikkat ediniz.** Eğer, V potansiyeli, iki iletken arasındaki ortalama potansiyel V olarak alınırsa, Denk.(2.121)'den,

$$C = \frac{Q}{V_{12}} \quad \text{(F)} \qquad (2.122)$$

eşitliği yazılabilir.

Bir kapasitörün kapasitesi, iki iletkenli bir sistemin fiziksel özelliğidir. Kapasite, iletkenlerin geometrisine ve iletkenler arasındaki ortamın dielektrik sabitine bağlıdır. Ancak, hiçbir şekilde, Q yüküne veya V_{12}, potansiyel farkına

bağlı değildir. **İletkenler arasına uygulanan voltaj ve iletkenler üzerinde serbest yükler olmasa bile, bir kapasitörün mutlaka bir kapasitesi vardır.** Denk(2.122)'de, ya **(1) iletkenler arasına uygulanan V potansiyelinin bilindiği kabul edilerek ve bu potansiyel farkından Q bulunarak**, yada **(2) Q yükünün bilindiği kabul edilerek ve Q yükünden V_{12} bulunarak,** C kapasitesi belirlenebilir. Buraya kadar olan bölümlerde, henüz sınır-değer problemlerinin çözüm metotları incelenmediğinden, C kapasitesi ikinci metot yardımı ile hesaplanabilir. **İkinci metot için takip edilmesi gereken adımlar aşağıda sıralanmıştır:**

1. Verilen geometriye uygun koordinat sistemi seçilir.
2. İletkenler üzerinde +Q ve -Q yüklerinin bulunduğu kabul edilir.
3. Denk(2.114), Gauss kanunu veya diğer bağıntılarla Q'dan $\vec{E}$ bulunur.
4. -Q yükü taşıyan iletkenden, +Q yükü taşıyan diğer iletkene kadar

$$V_{12} = -\int_{2}^{1} \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

integrali alınarak, V potansiyeli bulunur.

5. Q/V oranından C kapasitesi bulunur.

****

Örnek 2.15: Paralel plakalı bir kapasitör, aralarında d uzaklığı bulunan ve yüzey alanları S olan iki paralel iletken plakadan oluşmaktadır. Plakalar arası, dielektrik sabiti ε olan bir dielektrik madde ile doldurulduğuna göre, kapasiteyi bulunuz.

Çözüm 2.15: Kapasitörün kesiti Şekil.2.26'da gösterilmiştir. Kullanılması gereken koordinat sisteminin kartezyen koordinatlar olduğu gayet açıktır. Yukarıda belirtilen yol takip edilerek, üst plakada +Q, alt plakada -Q yükünün bulunduğunu kabul edelim. Yüklerin, $+\rho_s$ ve $(-\rho_s)$ yüzeysel yoğunluklar ile plakalar üzerinde uniform olarak dağılmış olduğu kabul edilebilir. Burada,

$$\rho_s = \frac{Q}{S}$$

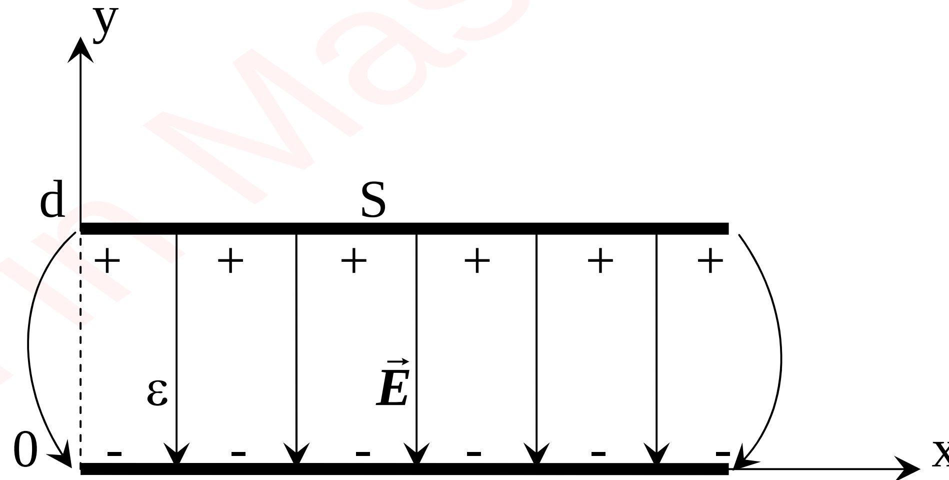
dir. Böylece, Denk.(2.114)'den,

$$\vec{E} = -\hat{y}\,\frac{\rho_s}{\varepsilon} = -\hat{y}\,\frac{Q}{\varepsilon S}$$

yazılabilir. Plakaların kenarlarındaki kaçak elektrik alanlar ihmal edilirse, $\vec{E}$-alanı dielektrik içinde sabit olur. Şimdi,

$$V_{12} = -\int_{y=0}^{y=d} \vec{E}\cdot d\vec{l} = -\int_0^d \left(\hat{y}\,\frac{Q}{\varepsilon S}\right)\cdot\left(\hat{y}dy\right) = \frac{Q}{\varepsilon S}d$$

elde edilir. Bu durumda, paralel plakalı kapasitörün kapasitesi,



Şekil.2.26: Paralel plakalı kondansatörün kesiti

$$C = \frac{Q}{V_{12}} = \varepsilon \frac{S}{d} \qquad (2.123)$$

şeklinde elde edilir. Görüldüğü gibi; C, Q veya V'den bağımsızdır.

Diğer metot yardımı ile yani, plakalar arasındaki V potansiyel farkının bilindiği kabul edilerek de, bu problem çözülebilir. Plakalar arasındaki elektrik alan düzgün ve

$$\vec{E} = -\hat{y}\frac{V_{12}}{d}$$

dir. Plakalar üzerindeki yüzeysel yük yoğunlukları, üst plakada $+\rho_s$, alt plakada $-\rho_s$ dir. Burada ρ_s,

$$\rho_s = \varepsilon E_y = \varepsilon \frac{V_{12}}{d}$$

dir. Bundan dolayı,

$$Q = \rho_s S = \varepsilon \frac{S}{d} V_{12}$$

ve

$$C = \frac{Q}{V_{12}} = \varepsilon \frac{S}{d}$$

elde edilir.

****

Örnek 2.16: Silindirik kapasitör, a-yarıçaplı bir iç iletken ile iç yarıçapı b olan bir dış iletkenden oluşur. İletkenler arası, dielektrik sabiti ε olan bir dielektrik madde ile doldurulduğuna ve kondansatörün uzunluğu L olduğuna göre, bu silindirik kapasitörün kapasitesini bulunuz.

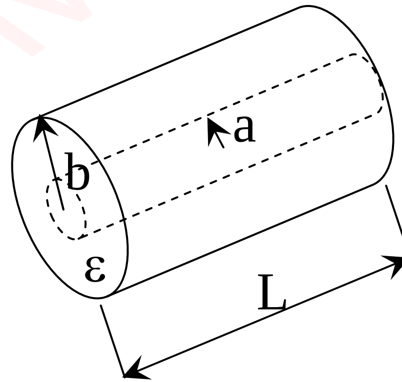
Çözüm 2.16: Bu problemde silindirik koordinatlar kullanılmalıdır. İç iletken yüzeyinde +Q, dış iletkenin iç yüzeyinde -Q yükünün bulunduğunu kabul edelim. a<r<b bölgesindeki dielektrik madde içinde alınan bir silindirik Gauss yüzeyine Gauss kanunu uygulanarak, dielektrik içindeki $\vec{E}$-alanı bulunabilir. Denk.(2.114) ile verilen $E_n = \rho_s / \varepsilon_0$ eşitliğine göre; bir iletken yüzeyinde, elektrik alanın, sadece, normal bileşeni mevcuttur. Burada, iletken yüzeyleri düzlem olmadığından,

dielektrik bölgedeki elektrik alan sabit değildir ve $a<r<b$ bölgesindeki $\vec{E}$-alanını bulmak için, Denk.(2.114) kullanılamaz. Bu durumda, Şekil.2.27 göz önüne alınarak,

$$\vec{E} = \hat{r}E_r = \hat{r}\frac{Q}{2\pi\varepsilon Lr} \tag{2.124}$$

yazılabilir. Yine, iletkenlerin kenarlarındaki kaçak elektrik alanlar ihmal edilerek, iletkenler arasındaki potansiyel farkı,

$$V_{ab} = -\int_{r=b}^{r=a} \vec{E}\cdot d\vec{l} = -\int_{b}^{a}\left(\hat{r}\frac{Q}{2\pi\varepsilon Lr}\right)\cdot\left(\hat{r}dr\right) = \frac{Q}{2\pi\varepsilon L}\ln\left(\frac{b}{a}\right) \tag{2.125}$$



Şekil.2.27: Silindirik kondansatör

bulunur. Böylece, bir silindirik kapasitör için,

$$C = \frac{Q}{V_{ab}} = \frac{2\pi\varepsilon L}{\ln(b/a)} \tag{2.126}$$

elde edilir. İki iletken arasındaki elektrik alan düzgün olmadığından dolayı, diğer metot ile (yani, V_{ab}'nin bilindiği kabul edilerek), bu problem çözülemez. Bu sebeple, böyle bir sınır-değer probleminin çözümünü öğreninceye kadar, $\vec{E}$ ve Q'yu V potansiyeli ile nasıl ifade edebileceğimizi bilmiyoruz.

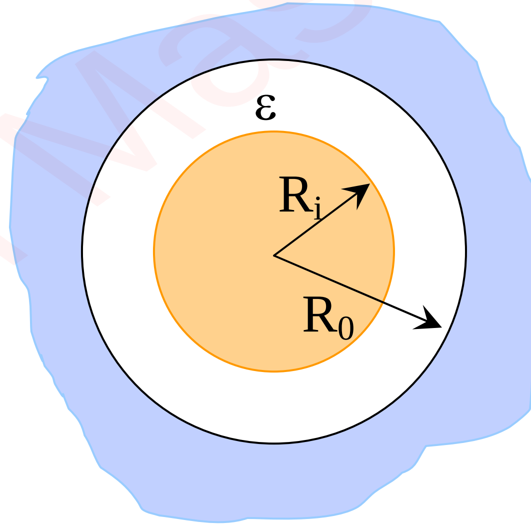
****

Örnek 2.17: Bir küresel kapasitör, yarıçapı R_i olan bir iç iletken küre ile yarıçapı R_o olan küresel iç yüzeyli bir dış iletkenden oluşmaktadır. İletken küreler arasındaki boşluk, dielektrik sabiti ε olan bir dielektrik ile doldurulduğuna göre, kapasiteyi bulunuz.

Çözüm 2.17: Şekil.2.28'deki küresel kapasitörün iç ve dış iletkenlerinde +Q ve -Q yükleri birikmiş olsun. R-yarıçaplı (R_i<R<R_o) bir küresel Gauss yüzeyine Gauss kanunu uygulanarak,

$$\vec{E} = \hat{R}E_R = \hat{R}\frac{Q}{4\pi\varepsilon R^2}$$

$$V = -\int_{R_o}^{R_i} \vec{E}\cdot\left(\hat{R}dR\right) = -\int_{R_0}^{R_i} \frac{Q}{4\pi\varepsilon R^2}dR = \frac{Q}{4\pi\varepsilon}\left(\frac{1}{R_i} - \frac{1}{R_o}\right)$$



Şekil.2.28: Küresel kapasitör

elde edilir. Böylece, bir küresel kapasitörün kapasitesi,

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{4\pi\varepsilon}{\frac{1}{R_i} - \frac{1}{R_o}} \tag{2.127}$$

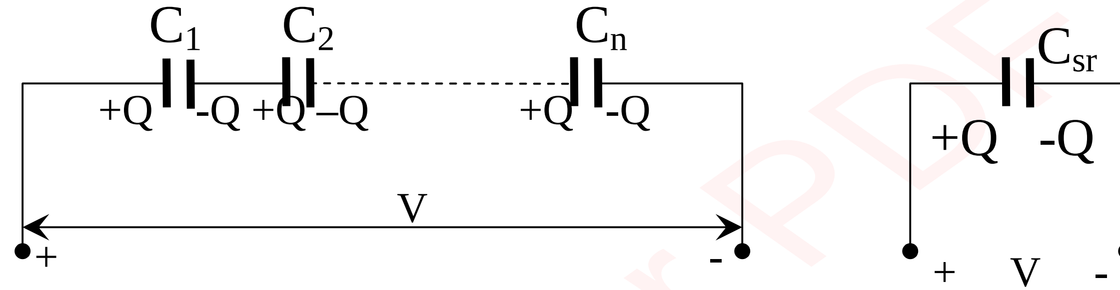
şeklinde bulunur.

****

2.10.1. SERİ VE PARALEL BAĞLI KAPASİTÖRLER

Kapasitörler, elektrik devrelerinde, değişik şekillerde bağlanırlar. İki temel bağlantı şekli, seri ve paralel bağlantıdır. Şekil.2.29'da gösterilen seri bağlantıda dış terminaller, sadece, ilk ve son kapasitörden alınır. Terminallere V gibi bir potansiyel farkı veya elektrostatik voltaj uygulandığında, dış terminallere bağlı iletkenlerde, +Q ve -Q yükleri birikir. İç bağlantı iletkenlerinde de yükler indüklenecek ve böylece, kapasiteden bağımsız olarak, her kapasitörde +Q ve -Q yükleri gözükecektir. Her kapasitör üzerinde düşen potansiyel farkı ise, Q/C_1, Q/C_2,..., Q/C_n ve

$$V = \frac{Q}{C_{sr}} = \frac{Q}{C_1} + \frac{Q}{C_2} + \ldots + \frac{Q}{C_n}$$



Şekil.2.29: Seri bağlı kapasitörler

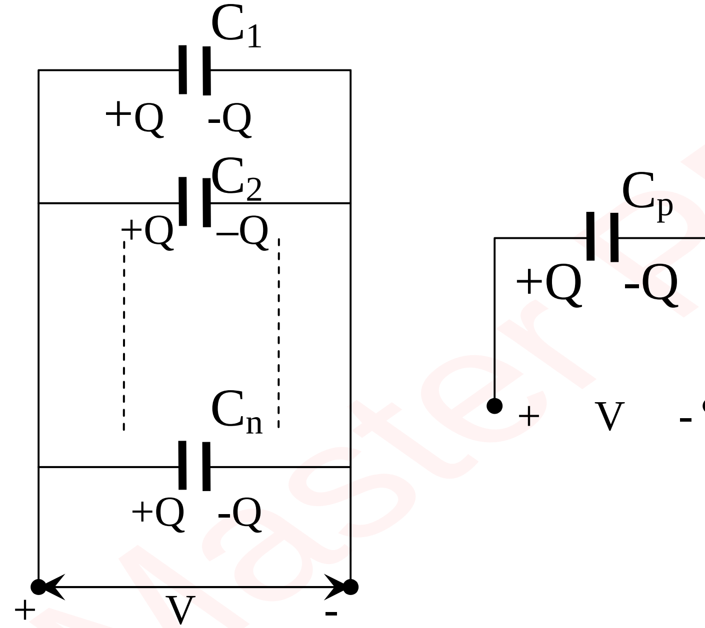
dir. Burada C_{sr} seri bağlı kapasitörlerin eşdeğer kapasitesidir. Buna göre,

$$\frac{1}{C_{sr}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \ldots + \frac{1}{C_n} \tag{2.128}$$

elde edilir.

Kapasitörlerin paralel bağlanması durumunda ise, dış terminaller Şekil.2.30'da olduğu gibi, bütün kapasitörlerin iletkenlerine bağlıdır. Terminallere V potansiyel

farkı uygulandığında, bir kondansatörde biriken yük, onun kapasitesine bağlıdır. Toplam yük, bütün yüklerin toplamıdır ve



Şekil.2.30: Paralel bağlı kapasitörler

$$Q = Q_1 + Q_2 + \ldots + Q_n = C_1V + C_2V + \ldots + C_nV$$

şeklinde yazılabilir. Bundan dolayı, paralel bağlı kapasitörlerin eşdeğer kapasitesi,

$$C_p = C_1 + C_2 + ... + C_n \quad (2.129)$$

şeklinde elde edilir. Seri bağlı kapasitörlerin eşdeğer kapasitesi, paralel bağlı dirençlerin eşdeğer direncine ve paralel bağlı kapasitörlerin eşdeğer kapasitesi de, seri bağlı dirençlerin eşdeğer direncine benzemektedir. Bu durumun nasıl açıklanabileceğini tartışınız.

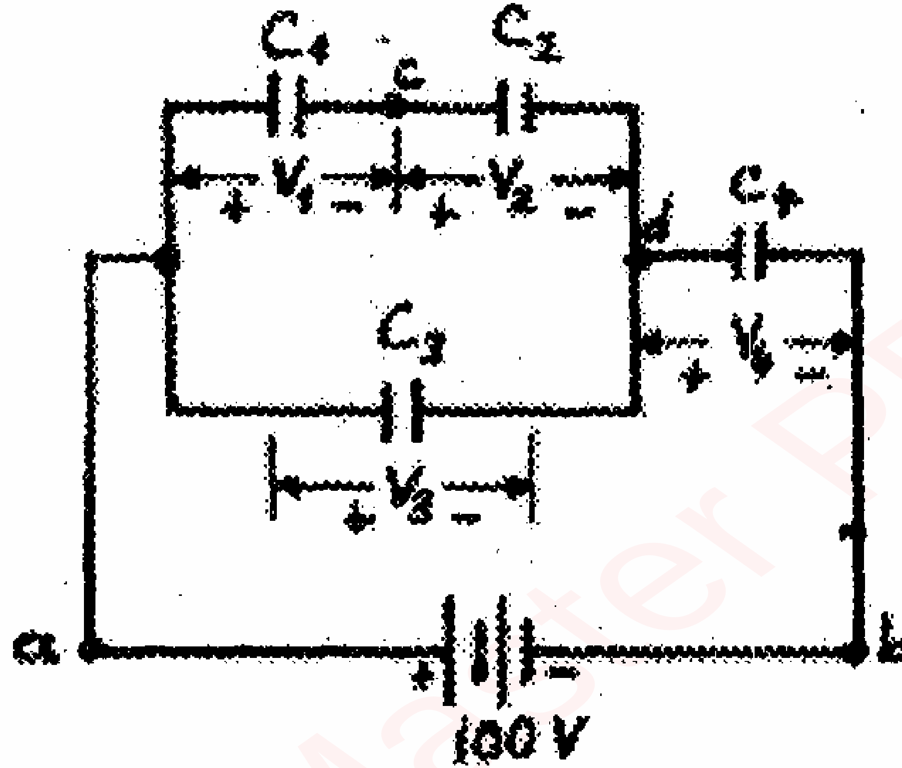
****

Örnek 2.18: C_1=1µF, C_2=2 µF, C_3=3 µF ve C_4=4µF kapasitörleri Şekil.2.31'deki gibi bağlanmıştır. a-b terminallerine 100V'luk bir DC voltaj uygulandığına göre; (a) a-b terminalleri arasındaki toplam eşdeğer kapasiteyi, (b) her kapasitördeki yük miktarını, (c) her kapasitör üzerinde düşen potansiyel farkını bulunuz.

Çözüm 2.18:

a) Seri bağlı C_1 ve C_2'nin eşdeğer kapasitesi C_{12},

$$C_{12} = \frac{1}{(1/C_1) + (1/C_2)} = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} = \frac{3}{2} \quad (\mu F)$$



Şekil.2.31: Bir kapasitör devresi

dır. C_{12} ile C_3, paralel olduğundan,

$$C_{123} = C_{12} + C_3 = \frac{11}{3} \ (\mu F)$$

dir. Böylece, toplam eşdeğer kapasite,

$$C_{ab} = \frac{C_{123}C_4}{C_{123} + C_4} = \frac{44}{23} = 1.913 \quad (\mu F)$$

şeklinde elde edilir.

b) Kapasite değerleri verilmiş olduğundan, voltajlar ancak, yükler belirlendiği sürece, bulunabilir. Q_1, Q_2, Q_3 ve Q_4 bilinmeyenlerini bulabilmek için, dört denkleme ihtiyaç vardır.

C_1 ve C_2 seri olduğundan, $Q_1=Q_2$

Kirchoff'un gerilim kanununa göre, $V_1+V_2=V_3$ olduğundan,

$$\frac{Q_1}{C_1} + \frac{Q_2}{C_2} = \frac{Q_3}{C_3}$$

$$\frac{Q_3}{C_3} + \frac{Q_4}{C_4} = 100$$

d'deki seri bağlantıdan dolayı, $Q_2+Q_3=Q_4$ dır. Verilen kapasite değerleri kullanılarak ve yukarıdaki denklemler çözülerek,

$$Q_1 = Q_2 = \frac{800}{23} = 34.8 \quad (\mu C)$$

$$Q_3 = \frac{3600}{23} = 156.5 \quad (\mu C)$$

$$Q_4 = \frac{4400}{23} = 191.3 \quad (\mu C)$$

elde edilir.

c) Bulunan yük değerleri, kapasite değerlerine bölünerek,

$$V_1 = \frac{Q_1}{C_1} = 34.8 \quad (V)$$

$$V_2 = \frac{Q_2}{C_2} = 17.4 \quad (V)$$

$$V_3 = \frac{Q_3}{C_3} = 52.2 \quad (V)$$

$$V_4 = \frac{Q_4}{C_4} = \mathbf{47.8} \quad (V)$$

bulunur. $V_1+V_2=V_3$ ve $V_3+V_4=100$ (V) bağıntıları dikkate alınarak, yukarıda elde edilen sonuçlar kontrol edilebilir.

****

2.11. ELEKTROSTATİK ENERJİ VE KUVVETLER

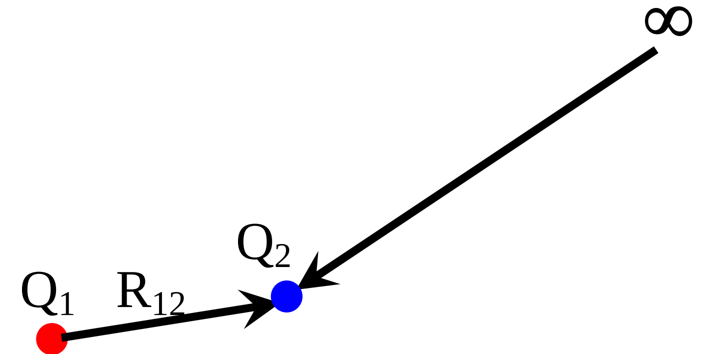
Elektrik alan içindeki **bir noktanın elektrik potansiyeli**, pozitif birim yükü sıfır referans potansiyeldeki sonsuzdan o noktaya getirmek için yapılması gerekli iş miktarı olarak tanımlanmıştı. Serbest uzaydaki Q_1 yükünün alanına karşı Q_2 yükünü sonsuzdan yavaşça R_{12} uzaklığına getirmek (yavaşça getirilirse, kinetik enerji ve ışıma etkileri ihmal edilebilir) için gerekli iş miktarı,

$$W_2 = Q_2 V_2 = Q_2 \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 R_{12}} \qquad (2.130)$$

dir. **Elektrostatik alanlar korunumlu olduğundan, W_2, Q_2 yükünün takip ettiği yoldan bağımsızdır**.

Denk.(2.130)'un diğer şekli,

$$W_2 = Q_1 V_1 = Q_1 \frac{Q_2}{4\pi\varepsilon_0 R_{12}} \qquad (2.131)$$

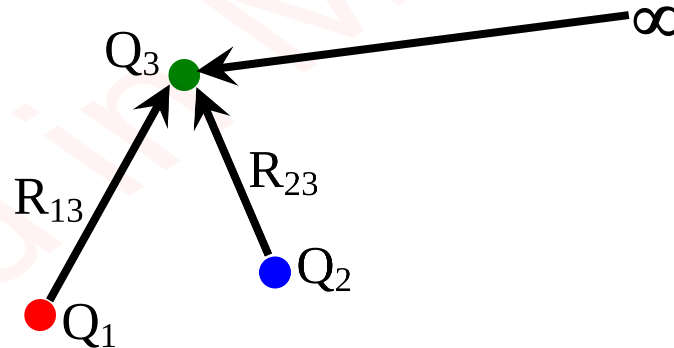


dir. **Bu iş, iki yüklü sistemde potansiyel enerji şeklinde depolanır**. Denk.(2.130) ve (2.131) ile verilen eşitlikler birleştirilerek,

$$W_2 = \frac{1}{2}\left(Q_1V_1 + Q_2V_2\right) \qquad (2.132)$$

yazılabilir. Şimdi, sonsuzdaki bir noktadan Q_1'den uzaklığı R_{13} ve Q_2'den uzaklığı R_{23} olan bir noktaya Q_3 gibi başka bir yükün getirildiğini dikkate alalım. Bu durumda,

$$\Delta W = Q_3V_3 = Q_3\left(\frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 R_{13}} + \frac{Q_2}{4\pi\varepsilon_0 R_{23}}\right) \qquad (2.133)$$



şeklinde ilave bir iş gereklidir. Burada ΔW ile Denk.(2.130)'daki W_2'nin toplamı, Q_1, Q_2 ve Q_3 yüklerinden oluşan sistemde depolanan W_3 potansiyel enerjisine eşittir. Yani,

$$W_3 = W_2 + \Delta W = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{Q_1Q_2}{R_{12}} + \frac{Q_1Q_3}{R_{13}} + \frac{Q_2Q_3}{R_{23}}\right) \qquad (2.134)$$

yazılabilir. Ayrıca bu ifadeyi,

$$W_3 = \frac{1}{2}\left[Q_1\left(\frac{Q_2}{4\pi\varepsilon_0 R_{12}} + \frac{Q_3}{4\pi\varepsilon_0 R_{13}}\right) + Q_2\left(\frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 R_{12}} + \frac{Q_3}{4\pi\varepsilon_0 R_{23}}\right)\right.$$
$$\left. + Q_3\left(\frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 R_{13}} + \frac{Q_2}{4\pi\varepsilon_0 R_{23}}\right)\right] \qquad (2.135)$$
$$= \frac{1}{2}\left(Q_1V_1 + Q_2V_2 + Q_3V_3\right)$$

şeklinde yazmak da mümkündür. **Bu denklemdeki V_1, Q_1 konumundaki potansiyeldir ve Q_2 ile Q_3 yükleri tarafından oluşturulur**. Ayrıca iki yüklü durum

için verilen Denk.(2.131)'deki V_1'den farklıdır. Benzer şekilde, üçlü yük sistemindeki V_2 potansiyeli Q_2 konumundaki, V_3 potansiyeli Q_3 konumundaki potansiyeldir.

İlave yükler getirmek suretiyle, bu metot genişletilebilir. Bu durumda, durgun ve **ayrık N-tane noktasal yükten oluşan bir yük grubunun potansiyel enerjisi**,

$$W_e = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N} Q_k V_k \quad \text{(J)} \qquad (2.136)$$

şeklinde ifade edilebilir. Burada, e indisi enerjinin elektriksel enerji olduğunu göstermek için kullanılmıştır. Ayrıca, Q_k konumundaki V_k elektrik potansiyeli, diğer bütün yüklerin oluşturduğu potansiyeldir ve

$$V_k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{\substack{j=1 \\ (j\neq k)}}^{N} \frac{Q_j}{R_{jk}} \qquad (2.137)$$

şeklinde verilir. Burada iki noktayı belirtmek gerekir. **Birincisi**, W_e enerjisi negatif olabilir. Örneğin, Q_1 ve Q_2 yükleri zıt işaretli ise Denk(2.130)'daki W_2 enerjisi de negatif olacaktır. Bu durumda iş, Q_2 yükünün sonsuzdan, Q_1 yükünün alanı içine

getirilmesiyle, Q_1 yükünün alanı tarafından yapılmış olur. **İkincisi**, Denk.(2.136)'daki W_e enerjisi sadece, etkileşim enerjisini (yükler arasındaki ortak enerjiyi) gösterir ve her noktasal yükün öz enerjisini içermez.

****

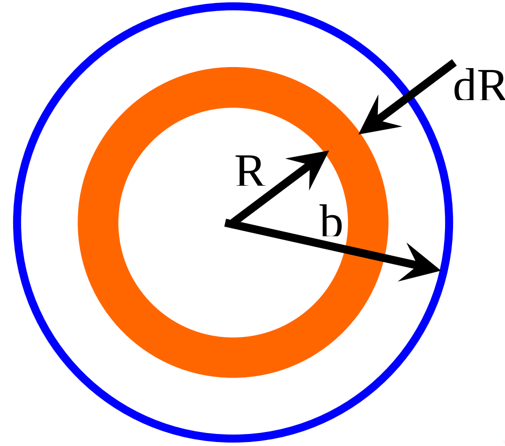
Örnek.2.19: Yarıçapı b ve hacimsel yük yoğunluğu ρ olan, düzgün yüklü bir küre oluşturmak için gereken enerjiyi bulunuz.

Çözüm.2.19: Simetriden dolayı, kalınlığı dR olan ardışık tabakalar getirerek, yüklü küre oluşturmak en kolay yoldur. Düzgün hacimsel yük yoğunluğu ρ olsun. Şekil.2.32'de gösterilen R yarıçapında potansiyel,

$$V_R = \frac{Q_R}{4\pi\varepsilon_0 R}$$

dir. Burada Q_R, R yarıçaplı bir küre içindeki toplam yük miktarıdır ve

$$Q_R = \rho\frac{4}{3}\pi R^3$$



Şekil.2.32: Düzgün yüklü bir kürenin oluşumu

şeklinde verilebilir. dR kalınlığındaki bir küresel kabuk içindeki diferansiyel yük,

$$dQ_R = \rho 4\pi R^2 dR$$

ve dQ_R diferansiyel yükünü getirmek için gerekli iş veya enerji,

$$dW = V_R dQ_R = \frac{4\pi}{3\varepsilon_0}\rho^2 R^4 dR$$

dir. Bundan dolayı, yarıçapı b ve yük yoğunluğu ρ olan, düzgün yüklü bir küre oluşturmak için gerekli olan toplam iş veya enerji,

$$W = \int dW = \frac{4\pi}{3\varepsilon_0}\rho^2 \int_0^b R^4 dR = \frac{4\pi\rho^2 b^5}{15\varepsilon_0} \quad \text{(J)} \qquad (2.138)$$

olur. Toplam yük,

$$Q = \rho \frac{4\pi}{3} b^3$$

olduğundan,

$$W = \frac{3Q^2}{20\pi\varepsilon_0 b} \quad \text{(J)} \qquad (2.139)$$

elde edilir. Bu denkleme göre; enerji, toplam yükün karesi ile doğru, yarıçap ile ters orantılıdır. Şekil.2.32'deki yüklü küre, örneğin bir elektron bulutu olabilir.

****

Ayrık yükler için Denk.(2.136)'da verilen W_e formülü sürekli yük dağılımı ρ'ya uygun olarak değiştirilebilir. Ayrı bir ispat yoluna gitmeden, Q_k yerine, ρdv yazılıp, toplam işareti yerine integral alınırsa,

$$W_e = \frac{1}{2} \iiint_{V'} \rho V dv \tag{2.140}$$

elde edilir. Buradaki V, hacimsel yük yoğunluğu ρ'nun bulunduğu noktadaki potansiyel ve V', ρ'nun mevcut olduğu bölgenin hacmidir.

****

Örnek.2.20: Örnek.2.19'daki problemi, Denk.(2.140) ile çözünüz.

Çözüm.2.20: Çok küçük kalınlıktaki ardışık küresel tabakalar getirilerek, bir yüklü küresel kabuk oluşturma problemi, Örnek.2.19'da çözüldü. Şimdi, yüklü kürenin mevcut olduğunu düşünelim. ρ bir sabit olduğundan, integral dışına alınabilir. Küresel simetriye sahip bir problem için,

$$W_e = \frac{\rho}{2} \iiint_{V'} V dv = \frac{\rho}{2} \int_0^b V \, 4\pi R^2 dR \tag{2.141}$$

yazılabilir. Burada V, merkezden uzaklığı R olan bir noktadaki potansiyeldir. R'deki V'yi bulmak için; **(1)** $R = \infty$'dan $R = b$'ye kadar $\vec{E}_1 = \hat{R} E_{R1}$'in, **(2)** $R = b$'den $R = 0$'a

kadar $\vec{E}_2 = \hat{R}E_{R2}$'nin olmak üzere, iki bölgede $\vec{E}$'nin çizgisel integralinin negatifinin bulunması gerekir. Buna göre;

$$\vec{E}_{R1} = \hat{R}\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R^2} = \hat{R}\frac{\rho b^3}{3\varepsilon_0 R^2} \quad , \quad R \geq b$$

ve

$$\vec{E}_{R2} = \hat{R}\frac{Q_R}{4\pi\varepsilon_0 R^2} = \hat{R}\frac{\rho R}{3\varepsilon_0} \quad , \quad 0 < R \leq b$$

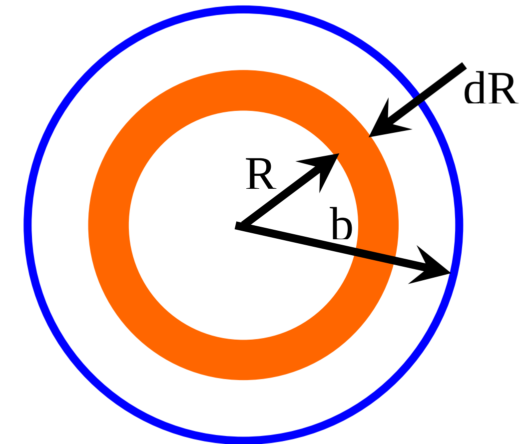
bulunur. Sonuç olarak,

$$V=-\int_{\infty}^{R}\vec{E}\cdot d\vec{R}=-\left[\int_{\infty}^{b}E_{R1}dR+\int_{b}^{R}E_{R2}dR\right]$$
$$=-\left[\int_{\infty}^{b}\frac{\rho b^3}{3\varepsilon_0 R^2}dR+\int_{b}^{R}\frac{\rho R}{3\varepsilon_0}dR\right] \qquad (2.142)$$
$$=\frac{\rho}{3\varepsilon_0}\left(b^2+\frac{b^2}{2}-\frac{R^2}{2}\right)=\frac{\rho}{3\varepsilon_0}\left(\frac{3}{2}b^2-\frac{R^2}{2}\right)$$

elde edilir. Bu eşitlik, $W_e=\frac{\rho}{2}\int_0^b V\,4\pi R^2 dR$'de yerine yazılırsa,

$$W_e=\frac{\rho}{2}\int_0^b\frac{\rho}{3\varepsilon_0}\left(\frac{3}{2}b^2-\frac{R^2}{2}\right)4\pi R^2 dR=\frac{4\pi\rho^2 b^5}{15\varepsilon_0}$$

elde edilir. Bu eşitlik, Denk.(2.138) ile aynıdır.



****

$W_e = \frac{1}{2}\iiint_{V'} \rho V dv$ denklemindeki W_e'nin, makroskobik yük dağılımı oluşturmak için gerekli olan işi (öz enerjiyi) içerdiğine dikkat ediniz. Çünkü W_e, her sonsuz küçük yük elemanının diğer bütün sonsuz küçük yük elemanları ile etkileşim enerjisidir. Zaten, düzgün bir küresel yükün öz enerjisini bulmak için, Örnek.2.20'de bu denklem kullanıldı. b yarıçapı sıfıra yaklaştıkça, verilen bir Q (matematiksel) noktasal yükünün öz enerjisi sonsuz olur (bkz. Denk(2.136)). Noktasal Q_k yüklerinin öz enerjileri, Denk.(2.136) ile verilen $W_e = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N} Q_k V_k$ eşitliğinde verilmemiştir.

Mademki; en küçük yük birimi olan elektronun kendisi bir yük dağılımıdır, o halde, kesinlikle noktasal yükler yoktur.

2.11.1. ELEKTROSTATİK ENERJİNİN ALAN NİCELİKLERİ İLE İFADESİ

Bir yük dağılımının elektrostatik enerjisini veren $W_e = \frac{1}{2}\iiint_{V'} \rho V dv$ denkleminde, kaynağı ifade eden yük yoğunluğu ρ ile potansiyel fonksiyonu V mevcuttur. Çoğu zaman, W_e'yi, ρ'nun kesin olarak bilinmesine gerek kalmadan, $\vec{E}$ ve/veya $\vec{D}$ gibi alan büyüklükleri ile ifade etmek daha uygundur. Böylece, bu denklemdeki ρ yerine $\nabla \cdot \vec{D}$ yazılırsa,

$$W_e = \frac{1}{2}\iiint_{V'} \left(\nabla \cdot \vec{D}\right) V dv \qquad (2.143)$$

elde edilir. Burada,

$$\nabla \cdot \left(V\vec{D}\right) = V\,\nabla \cdot \vec{D} + \vec{D} \cdot \nabla V \qquad (2.144)$$

şeklindeki vektörel eşitliği kullanılarak bu denklem,

$$W_e = \frac{1}{2}\iiint_{V'} \nabla \cdot (V\vec{D}) dv - \frac{1}{2}\iiint_{V'} \vec{D} \cdot \nabla V dv = \frac{1}{2}\oiint_{S'} V\vec{D} \cdot \hat{n}\, ds + \frac{1}{2}\iiint_{V'} \vec{D} \cdot \vec{E}\, dv \qquad (2.145)$$

şeklinde yazılabilir. Burada, birinci hacim integralini kapalı yüzey integraline dönüştürmek için, Diverjans teoremi ve ikinci integralde $-\nabla V$ yerine $\vec{E}$ kullanılmıştır. V' bütün yükleri içeren herhangi bir hacim olabileceğinden, onu R-yarıçaplı çok büyük bir küre olarak seçebiliriz. $R \to \infty$ yapılırsa, elektrik potansiyeli V, $1/R$ ile; elektrik deplasmanı $\vec{D}$'nin büyüklüğü, $1/R^2$ ile orantılı olarak düşer. S' sınır yüzeyinin alanı, R^2 ile orantılı olarak artar. Bundan dolayı, Denk.(2.145)'deki yüzey integrali, en az $1/R$ oranında azalacak ve $R \to \infty$ olduğunda sıfıra gidecektir. Böylece, sadece Denk.(2.145)'in sağındaki ikinci integral kalacaktır. Bu durumda,

$$W_e = \frac{1}{2}\iiint_{V'} \vec{D}\cdot\vec{E}\, dv \quad \text{(J)} \qquad (2.146a)$$

yazılabilir. Lineer ortam için, $\vec{D} = \varepsilon\vec{E}$ bağıntısı kullanılarak, Denk.(2.146a)'dan,

$$W_e = \frac{1}{2}\iiint_{V'} \varepsilon E^2\, dv \quad \text{(J)} \qquad (2.146b)$$

ve

$$W_e = \frac{1}{2}\iiint_{V'} \frac{D^2}{\varepsilon}\, dv \quad \text{(J)} \qquad (2.146c)$$

elde edilir. Matematiksel olarak, daima, bir **elektrostatik enerji yoğunluğu** tanımlanabilir. Bu enerji yoğunluğunun hacim integrali, toplam elektrostatik enerjiyi verir. Buna göre,

$$W_e = \frac{1}{2}\iiint_{V'} w_e \, dv \quad \text{(J)} \tag{2.147}$$

yazılabilir. Bundan dolayı,

$$w_e = \frac{1}{2}\vec{D}\cdot\vec{E} \quad \text{(J/m}^3\text{)} \tag{2.148a}$$

veya

$$w_e = \frac{1}{2}\varepsilon E^2 \quad \text{(J/m}^3\text{)} \tag{2.148b}$$

veya

$$w_e = \frac{D^2}{2\varepsilon} \quad \text{(J/m}^3\text{)} \tag{2.148c}$$

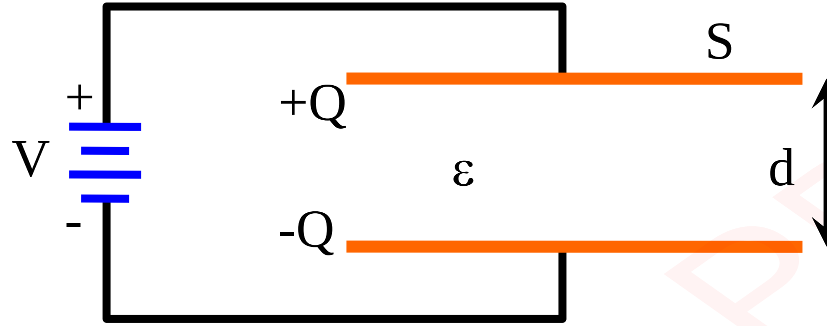
yazılabilir. Ancak, bir elektrik alan ile enerjiyi yerelleştirmek için fiziksel bir ispat olmadığından, **enerji yoğunluğunun bu tanımı sunidir**. Bütün bildiğimiz, Denk.(2.146a,b,c)'deki bütün hacim integrallerinin, doğru toplam elektrostatik enerjiyi verdiğidir.

****

Örnek.2.21: Aralarında d-uzaklığı bulunan ve yüzey alanları S olan paralel plakalı bir kondansatör V voltajı ile yüklenmiştir (Şekil.2.33). Plakalar arasındaki ortamın dielektrik sabiti ε olduğuna göre, kondansatörde depolanan elektrostatik enerjiyi bulunuz.

Çözüm.2.21: Görüldüğü gibi; DC kaynağın bağlanmasıyla üst ve alt plakalarda pozitif ve negatif yükler toplanır. Kenarlardaki kaçak alanlar ihmal edilirse, dielektrik ortamdaki elektrik alan plaka üzerinde düzgün ve dielektrikte sabit olur. Elektrik alanın büyüklüğü ise,

$$E = \frac{V}{d}$$



Şekil.2.33: Yüklü bir paralel plakalı kapasitör

olur. Denk.(2.146b) kullanılarak,

$$W_e = \frac{1}{2}\iiint_{V'} \varepsilon\left(\frac{V}{d}\right)^2 dv = \frac{1}{2}\varepsilon\left(\frac{V}{d}\right)^2 (Sd) = \frac{1}{2}\left(\varepsilon\frac{S}{d}\right)V^2$$

elde edilir. Son ifadenin parantezindeki $\varepsilon S / d$ terimi, paralel plakalı kondansatörün kapasitesidir (bkz. Denk.(2.123)). Böylece,

$$W_e = \frac{1}{2}CV^2 \quad \text{(J)} \qquad (2.149a)$$

yazılabilir. $Q = CV$ olduğundan, bu eşitlik,

$$W_e = \frac{1}{2}QV \quad \text{(J)} \tag{2.149b}$$

ve

$$W_e = \frac{Q^2}{2C} \quad \text{(J)} \tag{2.149c}$$

şeklinde de yazılabilir. Bu ifadeler, herhangi bir iki iletkenli kapasitör için de doğru sonuçlar verir.

****

2.11.2. ELEKTROSTATİK KUVVETLER

Coulomb kanunu, iki noktasal yük arasındaki kuvveti belirler. Daha karmaşık bir yüklü cisimler sisteminde, cisimlerden biri üzerinde diğer cisimlerdeki yükler tarafından oluşturulan kuvveti belirlemek için, Coulomb kanununu kullanmak çok sıkıcı olabilir. Yüklü bir paralel plakalı kondansatörün plakaları arasındaki kuvvetin bulunması gibi basit bir durumda dahi, aynı şey söz konusudur. Şimdi yüklü bir sistem içindeki bir nesneye, sistemin elektrostatik enerjisinden dolayı uygulanan kuvvetin hesaplanabilmesini sağlayan bir metot incelenecektir. Bu yeni metot, **sanal yer değiştirme prensibi (principle of virtual displacement)**’ne dayanır. Bu metot için, **(1) sabit yüklü yalıtılmış cisimler sistemi**, **(2) sabit potansiyelli iletken cisimler sistemi**, olmak üzere iki durum ele alınacaktır.

1. Sabit Yüklü Cisimler Sistemi

Birbirinden ayrılmış ve dış dünyadan yalıtılmış yüklü iletken (dielektrik de bulunabilir) cisimler sistemini göz önüne alalım. Cisimler üzerindeki yükler sabittir.

Elektrik kuvvetlerin, cisimlerden birine bir $d\vec{l}$ diferansiyel mesafesi kadar yer değiştirttiğini (sanal yer değiştirme) kabul edelim. Bu durumda, **sistem tarafından yapılan mekanik iş,**

$$dW = \vec{F}_Q \cdot d\vec{l} \qquad (2.150)$$

olur. Burada $\vec{E}$, sabit yükler şartı altında, cisme etkiyen toplam kuvvettir. Hiçbir dış enerjinin sağlanmadığı yalıtılmış bir sisteme sahip olunduğundan, bu mekanik iş, depolanmış elektrostatik enerjide aynı miktarda bir azalmaya yol açacaktır. Yani,

$$dW = -dW_e = \vec{F}_Q \cdot d\vec{l} \qquad (2.151)$$

olur. $dV = (\nabla V) \cdot d\vec{l}$ olduğundan, $d\vec{l}$ kadarlık bir yer değişiminden dolayı, **skalerde meydana gelen bir diferansiyel değişim, skalerin gradyenti ile $d\vec{l}$'nin skaler çarpımı** olduğundan,

$$dW_e = (\nabla W_e) \cdot d\vec{l} \qquad (2.152)$$

yazılabilir. $d\vec{l}$, keyfi olduğundan, $-dW_e = \vec{F}_Q \cdot d\vec{l}$ ile $dW_e = (\nabla W_e)\cdot d\vec{l}$ denkleminin karşılaştırılması sonucunda,

$$\vec{F}_Q = -\nabla W_e \quad \text{(N)} \tag{2.153}$$

elde edilir. Bu denklem, sistemin elektrostatik enerjisi kullanılarak $\vec{F}_Q$'nun hesaplanması için çok basit bir formül verir. Kartezyen koordinatlarda, kuvvet bileşenleri,

$$(F_Q)_x = -\frac{\partial W_e}{\partial x} \tag{2.154a}$$

$$(F_Q)_y = -\frac{\partial W_e}{\partial y} \tag{2.154b}$$

$$(F_Q)_z = -\frac{\partial W_e}{\partial z} \tag{2.154c}$$

olur. Eğer, göz önüne alınan cisim, örneğin z-ekseni etrafında dönmeye zorlanırsa, $d\phi$ kadarlık açısal yer değiştirme için sistem tarafından yapılan mekanik iş,

$$dW = (T_Q)_z d\phi \qquad (2.155)$$

olacaktır. Burada $(T_Q)_z$, sabit yükler şartında, cisim üzerine etkiyen **torkun z-bileşenidir**. Yukarıdakine benzer işlemler sonucunda,

$$(T_Q)_z = -\frac{\partial W_e}{\partial \phi} \quad \text{(N.m)} \qquad (2.156)$$

elde edilir.

2. Sabit Potansiyelli İletken Cisimler Sistemi

Şimdi, batarya gibi harici kaynaklar bağlanarak, iletken cisimlerin sabit potansiyellerde tutulduğu bir sistemi göz önüne alalım. Yüksüz dielektrik cisimler de bulunabilir. Bir iletken cismin $d\vec{l}$ kadarlık bir yer değiştirmesi, toplam elektrostatik enerjide bir değişime sebep olacak ve iletkenlere yük transfer etmek ve böylece onları sabit potansiyellerinde tutmak için, kaynaklara ihtiyaç duyulacaktır. **Eğer bir dQ_k yükü (pozitif veya negatif olabilir), V_k potansiyelinde tutulan k.ıncı**

iletkene ilave edilirse, kaynaklar tarafından yapılan iş veya sağlanan enerji $V_k dQ_k$ olur. Bu durumda, kaynaklar tarafından sağlanan toplam enerji,

$$dW_s = \sum_k V_k dQ_k \qquad (2.157)$$

olur. Sanal yer değiştirmenin sonucu olarak, sistem tarafından yapılan mekanik iş,

$$dW = \vec{F}_v \cdot d\vec{l} \qquad (2.158)$$

olur. Burada $\vec{F}_v$, sabit potansiyeller şartında iletken cisme etkiyen elektriksel kuvvettir. Ayrıca, $W_e = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N} Q_k V_k$ denklemine göre, yük transferleri, sistemin elektrostatik enerjisini dW_e miktarı kadar değiştirir. Yani,

$$dW_e = \frac{1}{2}\sum_k V_k dQ_k = \frac{1}{2} dW_s \qquad (2.159)$$

yazılabilir. Ayrıca, enerjinin korunumu ilkesine göre,

$$dW + dW_e = dW_s \qquad (2.160)$$

olması gerekir. Denk.(2.157), (2.158) ve (2.159)'un, Denk.(2.160)'da kullanılması halinde,

$$dW + dW_e = 2dW_e \qquad \vec{F}_v \cdot d\vec{l} = dW_e = (\nabla W_e) \cdot d\vec{l}$$

veya

$$\vec{F}_v = \nabla W_e \quad \text{(N)} \qquad (2.161)$$

verir. Bu denklem ile $\vec{F}_Q = -\nabla W_e$ denkleminin karşılaştırılması, incelenen iki durumdaki elektrik kuvveti ifadeleri arasındaki tek farkın (-) işareti olduğunu gösterir. Eğer iletken cisim z-ekseni etrafında dönmeye zorlanırsa, elektrik torkunun (momentinin) z-bileşeninin,

$$(T_v)_z = \frac{\partial W_e}{\partial \phi} \quad \text{(N.m)} \qquad (2.162)$$

olacağı görülür. Bu da, $(T_Q)_z = -\partial W_e / \partial \phi$ denkleminden sadece işaret bakımından farklıdır.

****

Örnek.2.22: Yüklü paralel plakalı bir kapasitörün iletken plakalarına etkiyen kuvveti bulunuz. Plakaların alanı S, plakalar arasındaki ortam hava ve mesafe x kadardır.

Çözüm.2.22: Bu problem iki şekilde çözülebilir:

(a) Sabit yükler yöntemiyle **(b)** Sabit potansiyeller yöntemiyle

Plakaların kenarlarındaki kaçak alanlar ihmal edilecektir.

(a) Sabit yükler metodu:

Plakalar üzerinde sabit $\pm Q$ yüklerinin olması yüzünden, plakalar arasındaki hava ortamında, plakalar arasındaki mesafeden bağımsız (sanal yer değiştirme ile değişmeyen),

$$E_x = \frac{Q}{(\varepsilon_0 S)} = \frac{V}{x}$$

şeklinde bir elektrik alan şiddeti vardır. Denk.(2.149b)'den,

$$W_e = \frac{1}{2}QV = \frac{1}{2}QE_x x$$

elde edilir. Burada Q ve E_x, sabittir. Denk.(2.154a) kullanılarak,

$$\left(\vec{F}_Q\right)_x = -\frac{\partial W_e}{\partial x} = -\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{2}QE_x x\right) = -\frac{1}{2}QE_x = -\frac{Q^2}{2\varepsilon_0 S} \qquad (2.163)$$

bulunur. Burada negatif işaretler, kuvvetin x'in artış yönüne ters yönde olduğunu gösterir. Bu bir çekme kuvvetidir.

(b) Sabit Potansiyeller Metodu:

Sabit potansiyellerle, W_e için Denk.(2.149a)'yı kullanmak daha uygun olur. Denk.(2.161)'den,

$$\left(\vec{F}_v\right)_x = \frac{\partial W_e}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{2}CV^2\right) = \frac{V^2}{2}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\varepsilon_0 S}{x}\right) = -\frac{\varepsilon_0 S V^2}{2x^2} \qquad (2.164)$$

elde edilir. Denk.(2.163)'deki $(F_Q)_x$ ile Denk.(2.164)'deki $(F_v)_x$ arasındaki fark nedir?

$$Q = CV = \frac{\varepsilon_0 S V}{x}$$

bağıntısı hatırlanarak,

$$(F_Q)_x = (F_v)_x \tag{2.165}$$

bulunur. Denk.(2.153) ile (2.161) ifadeleri arasındaki işaret farkına rağmen, kuvvet her iki durumda da aynıdır. Fiziksel problem üzerinde biraz düşünülürse, bunun doğru olması gerektiği inancı doğacaktır. Yüklü kondansatör sabit boyutlara sahip olduğundan, verilen bir Q yükü sabit bir V potansiyeli oluşturur. Bunun tersi de, doğrudur. Böylece, Q veya V'nin verilmesine bakılmaksızın, plakalar arasında tek bir kuvvet olduğu ve bu kuvvetin kesinlikle sanal yer değiştirmelere bağlı olmadığı söylenebilir. Kavram olarak zorlama (sabit Q veya sabit V sınırlaması) halinde, plakalar arasındaki tek kuvvet değişmez.

Önceki tartışma, C kapasiteli, yüklü iki iletkenli, genel bir kapasitör için de geçerlidir. Sabit yükler için, sanal bir $d\vec{l}$ yer değiştirmesi yönündeki elektrostatik $\vec{F}_l$ kuvveti,

$$(F_Q)_l = -\frac{\partial W_e}{\partial l} = -\frac{\partial}{\partial l}\left(\frac{Q^2}{2C^2}\right) = \frac{Q^2}{2C^2}\frac{\partial C}{\partial l} \tag{2.166}$$

olur. Sabit potansiyeller için,

$$(F_v)_l = \frac{\partial W_e}{\partial l} = \frac{\partial}{\partial l}\left(\frac{1}{2}CV^2\right) = \frac{V^2}{2}\frac{\partial C}{\partial l} = \frac{Q^2}{2C^2}\frac{\partial C}{\partial l} \qquad (2.167)$$

yazılabilir. Yüklü aynı kapasitör üzerine koşulan farklı sınırlamalara rağmen, iki yoldan da elde edilen kuvvetlerin eşit olduğu görülmektedir.

****

2.12. ELEKTROSTATİK PROBLEMLERİN ÇÖZÜMLERİ

Elektrostatik problemler, hareketsiz elektrik yüklerinin etkilerini içerirler. Bu problemler, başlangıçta bilinen ne ise, ona göre birkaç farklı şekilde kendi kendilerine mevcut olabilir. **Genellikle elde edilen çözüm, elektrik potansiyel, elektrik alan şiddeti ve/veya elektrik yük dağılımını verir**. Eğer yük dağılımı verilmişse, bundan önceki kısımlarda verilen denklemler yardımıyla, elektrik potansiyel ve elektrik alan şiddeti bulunabilir. Ancak, pek çok pratik problemde, her yerdeki yük dağılımı tam olarak bilinmediğinden, bu denklemler doğrudan kullanılamaz. Örneğin, uzaydaki belirli ayrık noktalardaki yükler ve bazı iletken cisimlerin potansiyelleri verilmişse, iletken cisim üzerindeki yüzeysel yük dağılımını ve/veya uzaydaki elektrik alan şiddetini bulmak çok güçtür. İletken cisimler basit geometrik sınırlara sahip olduğu zaman, **görüntüler metodunu** kullanmak önemli avantajlar sağlayabilir. Bu metot, Bölüm.2.12.3'de incelenecektir.

Başka bir tip problemde ise; **bütün iletken cisimlerin potansiyelleri biliniyor olabilir ve iletken sınırlarındaki yüzeysel yük dağılımı ile kuşatılmış uzaydaki potansiyel ve elektrik alan şiddetinin bulunması istenebilir.** Böyle durumlarda ortaya çıkacak diferansiyel denklemler, uygun sınır şartları ile çözülmelidir. Bu bölümde, değişik koordinat sistemlerindeki diferansiyel denklemler verilecek, ancak çözüm teknikleri Elektromanyetik Dalgalar dersine bırakılacaktır.

2.12.1. POISSON VE LAPLACE DENKLEMLERİ

Bölüm.2.8'de belirtildiği gibi; Denk.(2.93) ve (2.5), herhangi bir ortamdaki elektrostatik alanın diferansiyel denklemlerini veren iki temel denklemdir. Bu denklemler,

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho \tag{2.168}$$

$$\nabla \times \vec{E} = 0 \tag{2.169}$$

şeklinde verilmişti. Denk.(2.169)'daki $\vec{E}$'nin korunumlu olması, Denk.(2.38) ile

$$\vec{E} = -\nabla V \tag{2.170}$$

şeklinde verildiği gibi, bir V skaler elektrik potansiyelinin tanımlanmasına imkan verir. Lineer ve izotrop ortamda, $\vec{D} = \varepsilon\vec{E}$ olduğundan, Denk.(2.168)'den,

$$\nabla \cdot \varepsilon\vec{E} = \rho \qquad (2.171)$$

yazılabilir. Denk.(2.170), burada yerine yazılırsa,

$$\nabla \cdot \left(\varepsilon \nabla V\right) = -\rho \qquad (2.172)$$

elde edilir. Burada ε, uzayın koordinatlarının fonksiyonu olabilir. Basit ortam yani, homojen (aynı zamanda, lineer ve izotrop) bir ortam için, ε bir sabittir ve diverjans operatörünün dışına alınabilir. Böylece, Denk.(2.172)'den,

$$\nabla^2 V = -\frac{\rho}{\varepsilon} \qquad (2.173)$$

elde edilir. Burada, ∇^2**'ye Laplasyen (laplacian) Operatörü denir ve gradyentin diverjansına yani,** $\nabla \cdot \nabla$**'e özdeştir**. Denk.(2.173) ile verilen eşitliğe de **Poisson Denklemi** denir. Bu denkleme göre; basit ortamda V potansiyelinin laplasyeni (gradyentinin diverjansı) $-\rho / \varepsilon$'a eşittir. Burada ε, ortamın dielektrik geçirgenlik

katsayısı (burada bir sabittir) ve ρ, hacimsel yük yoğunluğudur (uzayın koordinatlarının fonksiyonu olabilir).

Diverjans ve gradyent işlemleri ayrı ayrı birinci mertebeden uzayın koordinatlarına göre türevleri içerdiğinden, Poisson denklemi de ikinci mertebeden türevleri içeren ve uzayın her noktasında sağlanan ikinci mertebeden bir diferansiyel denklemdir. Kartezyen koordinatlarda,

$$\nabla^2 V = \nabla \cdot \nabla V = \left[\hat{x}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{y}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{z}\frac{\partial}{\partial z} \right] \cdot \left[\hat{x}\frac{\partial V}{\partial x} + \hat{y}\frac{\partial V}{\partial y} + \hat{z}\frac{\partial V}{\partial z} \right]$$

dir ve Denk.(2.173),

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon} \qquad (2.174)$$

olur. Benzer şekilde, Denk.(1.86) ve (1.102) ile verilen eşitlikler kullanılarak, $\nabla^2 V$'nin silindirik ve küresel koordinatlardaki ifadesi,

$$\nabla^2 V = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial V}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2}\right) + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} \quad (2.175)$$

ve

$$\nabla^2 V = \frac{1}{R^2}\frac{\partial}{\partial R}\left(R^2\frac{\partial V}{\partial R}\right) + \frac{1}{R^2 \sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta\frac{\partial V}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{R^2 \sin^2\theta}\frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2} \quad (2.176)$$

şeklinde yazılabilir. Genellikle, önceden belirlenen sınır şartları yardımıyla, üç boyutlu Poisson denklemini çözmek kolay değildir. Serbest yüklerin bulunmadığı basit bir ortam içinde, $\rho = 0$'dır ve Denk (2.173),

$$\nabla^2 V = 0 \quad (2.177)$$

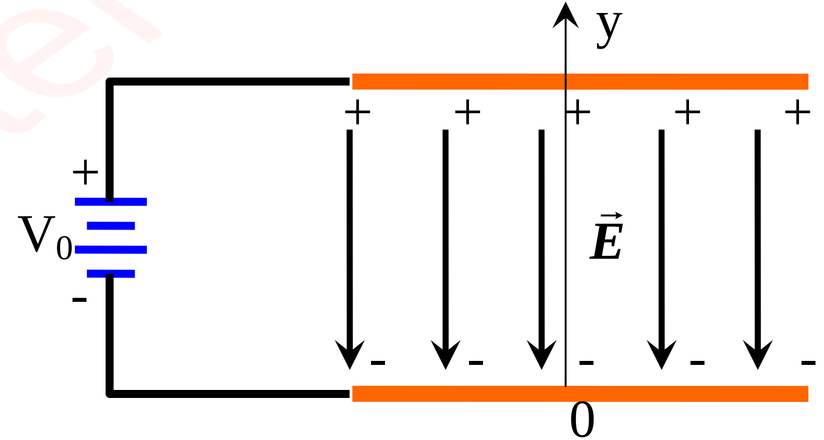
olur. Bu denkleme **Laplace Denklemi** denir. Laplace denkleminin elektromanyetikte çok önemli bir yeri vardır. Farklı potansiyellerde tutulan (kapasitör gibi) bir iletken grubunu içeren problemler için geliştirilmiş bir denklemdir. Bu tür problemlerde, ilk olarak, Denk.(2.177)'den V bulunduktan sonra, $(-\nabla V)$'den $\vec{E}$ bulunur ve $\rho_s = \varepsilon E_n$'den de, iletkenler üzerindeki yük dağılımları belirlenebilir.

****

Örnek.2.23: Paralel plakalı bir kapasitör, aralarında d-mesafesi bulunan ve 0 ile V potansiyellerinde tutulan iki plakadan oluşmaktadır (Şekil.2.34). Plaka kenarlarındaki kaçak alanları ihmal ederek,

(a) Plakalar arasındaki herhangi bir noktadaki potansiyeli,

(b) Plakalardaki yüzeysel yük yoğunluklarını bulunuz.



Şekil.2.34: Paralel plakalı kapasitör

Çözüm.2.23:

(a) Plakalar arasında $\rho = \mathbf{0}$ olduğundan, Laplace denklemi kullanılabilir. Elektrik alanın plaka kenarlarındaki saçak etkilerinin ihmal edilmesi; plakalar arasındaki alan dağılımının,

plakaların sonsuz geniş alınması halindeki alana eşit olması ve V potasiyelinin x ve z yönlerinde değişiminin olmadığı anlamına gelir. Böylece Denk.(2.174),

$$\frac{d^2V}{dy^2} = 0 \tag{2.178}$$

yazılabilir. Bu ifade y'ye göre integre edilirse,

$$\frac{dV}{dy} = C_1$$

elde edilir. Burada C_1, belirlenecek olan integrasyon sabitidir. Tekrar integral alınarak,

$$V = C_1 y + C_2 \tag{2.179}$$

bulunur. Buradaki integrasyon sabitlerinin belirlenmesi için,

$$V\Big|_{y=0} = 0 \tag{2.180a}$$

$$V\Big|_{y=d} = V_0 \tag{2.180b}$$

şeklinde iki sınır şartına ihtiyaç vardır. Bu sınır şartları, $V = C_1 y + C_2$ denkleminde kullanılarak, y=0 için $C_2 = 0$ ve y=d için $C_1 = V_0 / d$ bulunur. Böylece, plakalar arasındaki herhangi bir y-noktasındaki potansiyel, $V = C_1 y + C_2$ denkleminden,

$$V = \frac{V_0}{d} y \qquad (2.181)$$

şeklinde bulunur. Bu ifadeye göre, potansiyel y=0'dan y=d'ye kadar lineer olarak artar.

(b) Yüzeysel yük yoğunluklarının bulunabilmesi için, y=0 ve y=d'de bulunan iletken plakalardaki $\vec{E}$ alanının bilinmesi gerekir. Denk.(2.170) ve (2.181)'den,

$$\vec{E} = -\nabla V = -\hat{y}\frac{\partial V}{\partial y} = -\hat{y}\frac{V_0}{d} \qquad (2.182)$$

bulunur. Görüldüğü gibi, elektrik alan şiddeti sabit ve y'den bağımsızdır. Ayrıca, $\vec{E}$'nin yönünün V'nin artış yönüne ters olduğuna dikkat ediniz. İletken plakalardaki yüzeysel yük yoğunlukları Denk.(2.67) ile verilen,

$$E_n = \hat{n} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon}$$

denkleminden belirlenebilir. Alt plakada,

$$\hat{n} = \hat{y}, \quad E_{na} = -\frac{V_0}{d}, \quad \rho_{sa} = -\frac{\varepsilon V_0}{d}$$

üst plakada,

$$\hat{n} = -\hat{y}, \quad E_{nü} = \frac{V_0}{d}, \quad \rho_{sü} = \frac{\varepsilon V_0}{d}$$

dir. Buna göre; bir elektrostatik alandaki elektrik alan çizgileri, pozitif yüklerden başlayıp negatif yüklerde son bulur.

****

Örnek.2.24: Düzgün hacimsel yük yoğunluğu, $R>b$ için $\rho = 0$, $0 \leq R \leq b$ için $\rho = -\rho_0$ olan bir küresel elektron bulutunun iç ve dış taraflarındaki $\vec{E}$ alanını, **V**'ye ait Poisson ve Laplace denklemlerini çözerek belirleyiniz.

Çözüm.2.24: Bu problem, Bölüm.2'de (Örnek.2.6) Gauss kanunu ile çözülmüştü. Şimdi, tek boyutlu Poisson ve Laplace denklemlerinin çözümünü göstermek için, aynı problem kullanılacaktır. θ ve ϕ yönlerinde değişim olmadığından, sadece küresel koordinatlarda R'nin fonksiyonları ile ilgileneceğiz.

(a) Elektron bulutunun iç tarafında,

$$0 \le R \le b, \quad \rho = -\rho_0$$

olduğundan, bu bölgede Poisson denklemi $\nabla^2 V_i = -\rho / \varepsilon_0$ geçerlidir.

$$\nabla^2 V = \frac{1}{R^2}\frac{\partial}{\partial R}\left(R^2 \frac{\partial V}{\partial R}\right) + \frac{1}{R^2 \sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta \frac{\partial V}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{R^2 \sin^2\theta}\frac{\partial^2 V}{\partial\phi^2}$$

denklemindeki $\frac{\partial}{\partial\theta}$ ve $\frac{\partial}{\partial\phi}$ terimleri atılarak,

$$\frac{1}{R^2}\frac{d}{dR}\left(R^2 \frac{dV_i}{dR}\right) = \frac{\rho_0}{\varepsilon_0}$$

veya

$$\frac{d}{dR}\left(R^2\frac{dV_i}{dR}\right)=\frac{\rho_0}{\varepsilon_0}R^2 \tag{2.183}$$

yazılabilir. Bu ifade integre edilerek,

$$R^2\frac{dV_i}{dR}=\frac{\rho_0}{3\varepsilon_0}R^3+C_1$$

$$\frac{dV_i}{dR}=\frac{\rho_0}{3\varepsilon_0}R+\frac{C_1}{R^2} \tag{2.184}$$

elde edilir. Elektron bulutunun iç tarafındaki elektrik alan şiddeti,

$$\vec{E}_i=-\nabla V_i=-\hat{R}\left(\frac{dV_i}{dR}\right)=-\hat{R}\left(\frac{\rho_0}{3\varepsilon_0}R+\frac{C_1}{R^2}\right)$$

dir. $\vec{E}_i$, **R=0**'da sonsuz olamayacağından, C_1 sabiti sıfır olmalıdır. Böylece,

$$\vec{E}_i=-\hat{R}\frac{\rho_0}{3\varepsilon_0}R,\qquad 0\le R\le b \tag{2.185}$$

elde edilir.

(b) Elektron bulutunun dışında,

$$R \geq b, \quad \rho = 0$$

dır. Bu bölgede Laplace denklemi geçerlidir. Buna göre;

$$\nabla^2 V_0 = \frac{1}{R^2}\frac{d}{dR}\left(R^2 \frac{dV_0}{dR}\right) = 0 \tag{2.186}$$

yazılıp integre edilirse,

$$\frac{dV_0}{dR} = \frac{C_2}{R^2} \tag{2.187}$$

veya

$$\vec{E}_0 = -\nabla V_0 = -\hat{R}\frac{dV_0}{dR} = -\hat{R}\frac{C_2}{R^2} \tag{2.188}$$

elde edilir. **R**=**b**'de, $\vec{E}_0$ ve $\vec{E}_i$ birbirine eşitlenerek, C_2 sabiti bulunabilir. Burada, ortam karakteristiklerinde süreksizlik yoktur. Böylece,

$$\frac{C_2}{b^2} = \frac{\rho_0}{3\varepsilon_0} b$$

ve buradan,

$$C_2 = \frac{\rho_0}{3\varepsilon_0} b^3 \qquad (2.189)$$

ve

$$\vec{E}_0 = -\hat{R}\frac{\rho_0 b^3}{3\varepsilon_0 R^2}, \qquad R \geq b \qquad (2.190)$$

bulunur. Elektron bulutu içinde bulunan toplam yük miktarı,

$$Q = -\rho_0 \frac{4\pi}{3} b^3$$

olduğundan Denk.(2.190),

$$\vec{E}_0 = \hat{R}\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R^2} \qquad (2.191)$$

şeklinde yazılabilir. Bu eşitlik, bir $\mathbf{Q}$ noktasal yükünden $\mathbf{R}$ uzaklıktaki elektrik alan şiddetine benzer bir ifadedir.

Potansiyelin **R**'nin fonksiyonu olarak incelenmesi halinde, bu problemin daha iyi anlaşılması sağlanabilir. Denk.(2.184) ile verilen $\frac{dV_i}{dR} = \frac{\rho_0}{3\varepsilon_0} R + \frac{C_1}{R^2}$ (C_1=0 olduğu dikkate alınarak) eşitliği integre edilirse,

$$V_i = \frac{\rho_0}{6\varepsilon_0} R^2 + C_1' \tag{2.192}$$

elde edilir. C_1' nün yeni bir integrasyon sabiti olduğuna ve C_1 ile aynı olmadığına dikkat ediniz. Denk.(2.189) ile verilen $C_2 = \frac{\rho_0}{3\varepsilon_0} b^3$, Denk.(2.187) ile verilen $\frac{dV_0}{dR} = \frac{C_2}{R^2}$ denkleminde yerine yazılıp integre edilirse,

$$V_0 = -\frac{\rho_0}{3\varepsilon_0 R} b^3 + C_2' \tag{2.193}$$

elde edilir. Ancak, **V** sonsuzda $(R \to \infty)$ sıfır olduğundan, C_2' sıfır olmalıdır. **Elektrostatik potansiyel sınırda sürekli iken, V_i ve V_0 R=b de eşitlenerek**,

$$\frac{\rho_0 b^2}{6\varepsilon_0} + C_1' = -\frac{\rho_0 b^2}{3\varepsilon_0}$$

veya

$$C_1' = -\frac{\rho_0 b^2}{2\varepsilon_0} \qquad (2.194)$$

ve $V_i = \dfrac{\rho_0}{6\varepsilon_0} R^2 + C_1'$ denkleminden,

$$V_i = -\frac{\rho_0}{3\varepsilon_0}\left[\frac{3b^2}{2} - \frac{R^2}{2}\right] \qquad (2.195)$$

elde edilir. Buradaki V_i, Denk.(2.142)'deki **V** ile ($\rho = -\rho_0$ olması halinde) aynıdır.

****

BİRİNCİ BÖLÜM

STATİK MANYETİK ALANLAR

1.1 GİRİŞ

Elektrik alan şiddeti $\vec{E}$'nin, serbest uzaydaki elektrostatiğin incelenmesi için gerekli olan tek temel vektörel alan niceliği olduğunu biliyoruz. Bir malzeme ortamında, ikinci bir vektörel alan niceliği tanımlamak uygun olmaktadır. Bu nicelik, kutuplanmanın etkisini hesaba katmak için kullanılan elektrik akı yoğunluğu $\vec{D}$'dir. Aşağıdaki iki denklem elektrostatik metodun temelini oluşturur.

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho \qquad (1.1)$$

$$\nabla \cdot \vec{E} = 0 \qquad (1.2)$$

Ortamın elektriksel özelliği, $\vec{D}$ ile $\vec{E}$ arasındaki bağıntıyı belirler. **Eğer ortam lineer ve izotropik ise, basit temel bağıntı** $\vec{D} = \varepsilon\vec{E}$ dir.

Küçük bir test yükü q, bir elektrik alana yerleştirildiği zaman, bir $\vec{F}_e$ elektrik kuvvetine maruz kalır. Bu kuvvet, q'nun konumunun bir fonksiyonudur:

$$\vec{F}_e = q\vec{E} \qquad (1.3)$$

Test yükü, (bu bölümde tanımlanacak olan) bir manyetik alanda hareket ettiği zaman, deneyler, aşağıdaki özelliklere sahip olan bir $\vec{F}_m$ kuvvetine maruz kalacağını göstermektedir:

(1) $\vec{F}_m$'nin büyüklüğü q ile orantılıdır.

(2) $\vec{F}_m$'nin herhangi bir noktadaki doğrultusu, o noktadaki sabit doğrultuya ve test yükünün hız vektörüne diktir.

(3) $\vec{F}_m$'nin büyüklüğü, hızın bu sabit doğrultuya dik bileşenleri ile de orantılıdır.

F_m kuvveti manyetik bir kuvvettir; $\vec{E}$ veya $\vec{D}$ cinsinden ifade edilemez. $\vec{F}_m$'nin karakteristikleri, yeni bir vektörel alan niceliği manyetik akı yoğunluğu $\vec{B}$ tanımlanarak tayin edilir. Bu vektör, hem sabit doğrultuyu hem de orantı sabitini belirler. SI birimler cinsinden, manyetik kuvvet,

$$\vec{F}_m = q\vec{u} \times \vec{B} \quad \text{(N)} \qquad (1.4)$$

olarak ifade edilebilir. Burada $\vec{u}$ (m/s) hız vektörüdür; $\vec{B}$ **weber/metre kare (Wb/m^2) veya tesla (T)** cinsinden ölçülür.

NOT: Bir Wb/m^2 veya tesla, CGS birimleri sisteminde 10^4 Gauss'a eşittir. Yerin manyetik alanı, yaklaşık ½ Gauss veya $0{,}5\times10^{-4}$ T' dır. Bu durumda, bir q yüküne etkiyen toplam elektromanyetik kuvvet,

$$\vec{F} = \vec{F}_e + \vec{F}_m$$

yani,

$$\vec{F} = q\left(\vec{E} + \vec{u}\times\vec{B}\right) \quad \text{(N)} \qquad (1.5)$$

olur. Bu ifade **Lorentz kuvvet denklemi** olarak adlandırılır. Bu ifadenin geçerliliği, deneylerle şüphe götürmez bir şekilde ortaya konmuştur. Küçük bir q yükü için, elektrik alan şiddeti $\vec{E}$'nin tanımı olarak $\vec{F}_e/q$'yu ve **manyetik akı yoğunluğu $\vec{B}$'nin tanım bağıntısı olarak** $\vec{F}_m/q = \vec{u}\times\vec{B}$' yi kabul edebiliriz. Alternatif olarak, Lorentz kuvvet kanununu elektromanyetik modelin temel postülatı olarak alabiliriz; bu bağıntı diğer postülatlardan türetilemez.

1.2 SERBEST UZAYDA MANYETOSTATİĞİN TEMEL POSTÜLATLARI

Serbest uzaydaki manyetostatiği (kararlı manyetik alanları) incelemek için, sadece manyetik akı yoğunluk vektörü $\vec{B}$ göz önüne alınır. $\vec{B}$' nin diverjans ve rotasyonelini veren iki temel postülat şunlardır:

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \qquad (1.6)$$

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} \qquad (1.7)$$

Denk.(1.7)'deki μ_0 **serbest uzayın manyetik geçirgenliği (permiabilite) dir** ve değeri

$$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \quad \text{(H/m)}$$

dir. Burada $\vec{J}$ **akım yoğunluğudur**. Herhangi bir vektörel alanın rotasyonelinin diverjansı sıfır olduğundan Denk.(1.7)' den,

$$\nabla \cdot \vec{J} = 0$$

elde edilir. Bu sonuç, kararlı akımlar için elde edilen ifade ile uyumludur.

Denk.(1.6)'nın, boş uzaydaki elektrostatiğin $\nabla \cdot \vec{E} = \rho / \varepsilon_0$ denklemi ile karşılaştırılması bize, **elektrik yük yoğunluğu ρ'nun hiçbir manyetik benzerinin olmadığı sonucuna götürür**. Denk.(1.6)'nın hacim integrali alınarak ve diverjans teoremi uygulanarak,

$$\oiint_S \vec{B} \cdot d\vec{s} = 0 \qquad (1.8)$$

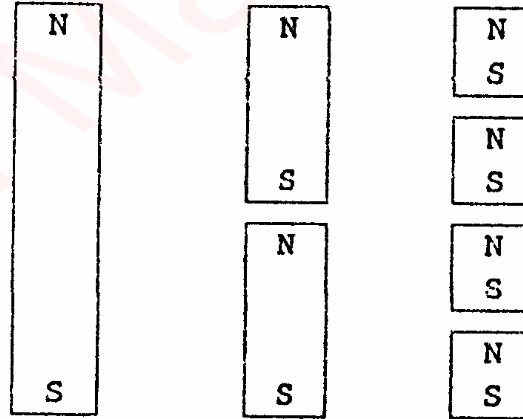
elde edilir. Burada yüzey integrali, keyfi bir hacmi sınırlayan yüzey üzerinden alınır. Denk.(1.8) ile,

$$\oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

denklemi karşılaştırılarak, yine, **yalıtılmış manyetik yüklerin olmadığı sonucuna varırız.** **Hiçbir manyetik akış kaynağı yoktur ve manyetik akı çizgileri daima kendi üzerlerine kapanırlar.** Denk.(1.8) ayrıca, manyetik akının korunumu

kanununun ifadesi olarak kabul edilebilir. Çünkü bu ifade, herhangi bir kapalı yüzeyden dışa doğru manyetik akının sıfır olduğunu gösterir.

Sürekli bir çubuk mıknatıstaki geleneksel güney ve kuzey kutup tanımı kuzey kutbunda yalıtılmış pozitif bir manyetik yükün ve güney kutbunda yalıtılmış negatif bir manyetik yükün varlığını belirtmez. Şekil.1.1a'daki güney ve kuzey kutuplu çubuk mıknatısı göz önüne alalım. **Eğer bu mıknatıs iki parçaya bölünürse, yeni güney ve kuzey kutuplar ortaya çıkar** ve Şekil.1.1b'deki gibi daha kısa iki mıknatıs elde edilir. Eğer bu iki mıknatısın herhangi biri yeniden iki parçaya bölünürse, Şekil.1.1c'deki gibi, her biri güney ve kuzey kutuplu dört mıknatıs ortaya çıkar.



Şekil.1.1: Çubuk mıknatısın ardışık olarak bölünmesi

Bu işleme, mıknatıslar atomik boyutlu olana kadar devam edilebilir ancak, her bir sonsuz küçük mıknatıs yine de bir kuzey ve kutba sahip olur. **Öyleyse, manyetik kutupların yalıtılamayacağı açıktır. Manyetik akı çizgileri, bir mıknatısın bir ucundan diğer ucuna mıknatısın dışından dolanarak başladıkları noktaya mıknatısın içinden geri dönerler**. Kuzey ve güney kutup adlandırması, yerin manyetik alanı içinde serbest olarak asılı bir mıknatıs çubuğunun uçlarının kuzey ve güney yönleri göstermesi yüzündendir.

Denk.(1.7)'deki rotasyonel bağıntısının integral biçimi, her iki yanı açık bir yüzey üzerinden integre edilerek ve Stokes teoremi uygulanarak elde edilebilir. Bu durumda,

$$\iint_S \left(\nabla \times \vec{B}\right) \cdot d\vec{s} = \mu_0 \iint_S \vec{J} \cdot d\vec{s}$$

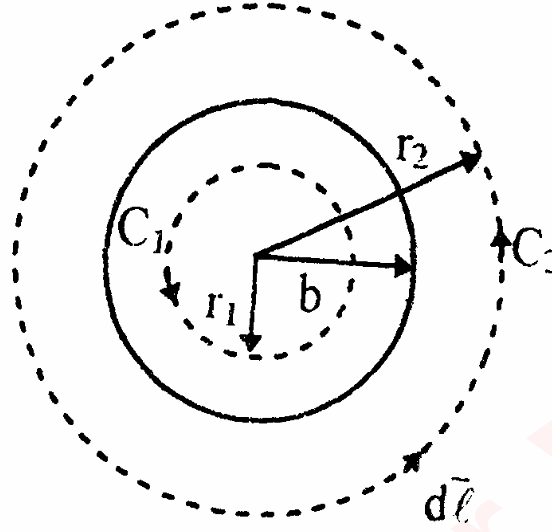
veya

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I \qquad (1.9)$$

elde edilir. Burada çizgi integrali için C yolu, S yüzeyini sınırlayan çevre; I ise S den geçen toplam akımdır. **C'nin ve akımın yönü sağ-el kuralına uyar.** Denk.(1.9), **Ampere devre kanununun bir biçimidir**. **Bu kanuna göre, serbest uzayda herhangi bir kapalı yol etrafında manyetik akı yoğunluğunun dolanımı (sirkülasyonu), yol tarafından sınırlan yüzeyden geçen toplam akımla μ_0 ın çarpımıdır**. **Ampere devre kanunu, B'nin büyüklüğü yol üzerinde sabit olacak şekilde, akım etrafında kapalı bir C yolu bulunduğu zaman**, bir I akımının sebep olduğu B manyetik akı yoğunluğunu bulmada çok faydalıdır.

****

Örnek 1.1: b yarıçaplı, dairesel kesitli, sonsuz uzun düz bir iletken kararlı bir I akımı taşımaktadır. İletkenin hem içindeki hem de dışındaki bölgede manyetik akı yoğunluğunu tayin ediniz.



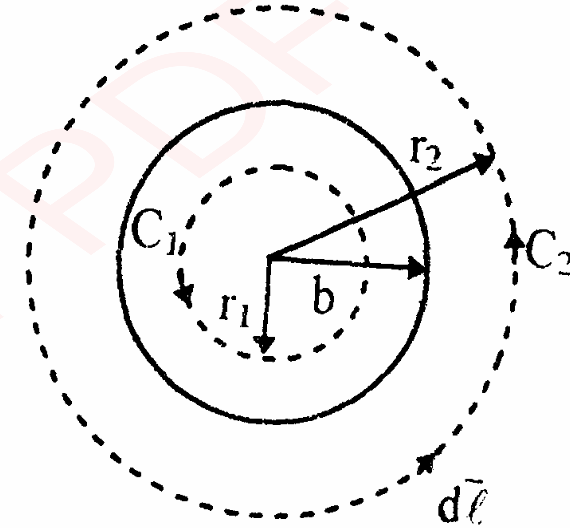
Şekil.1.2: Sayfa dışına doğru I akımı taşıyan düz dairesel iletkenin kesiti

Çözüm:

İlk önce, bu problemin silindirik simetriye sahip olduğuna ve Ampere devre kanununun uygulanabileceğine dikkat edelim. Eğer iletkeni z ekseni boyunca alırsak, manyetik akı şiddeti B, ϕ yönünde olacaktır. Şekil.1.2, iletkenin kesitini ve akım taşıyan iletkenin sırasıyla içindeki ve dışındaki C_1 ve C_2 dairesel integrasyon yollarını göstermektedir. Yine belirtelim ki, C_1 ve C_2'nin yönleri ile I akımının yönü

sağ el kuralına uyar (Sağ elin parmakları C_1 ve C_2'nin yönlerini gösterdiği zaman, baş parmak akımın yönünü gösterir).

a) İletken içinde:



$$\vec{B}_1 = \hat{\phi} B_{\phi 1}, \quad d\vec{l} = \hat{\phi} r_1 d\phi$$

$$\oint_{C_1} \vec{B}_1 \cdot d\vec{l} = \int_0^{2\pi} B_{\phi 1} r_1 d\phi = 2\pi r_1 B_{\phi 1}$$

dir. C_1'in sardığı alandan geçen akım,

$$I_1 = \frac{\pi r_1^2}{\pi b^2} I = \left(\frac{r_1}{b}\right)^2 I$$

olur. Bu yüzden, Ampere devre kanunundan,

$$\vec{B}_1 = \hat{\phi}\, B_{\phi 1} = \hat{\phi}\, \frac{\mu_0 r_1 I}{2\pi b^2}, \qquad r_1 \le b. \qquad (1.10)$$

elde edilir.

b) İletkenin dışında:

$$\vec{B}_2 = \hat{\phi}\, B_{\phi 2}, \quad d\vec{l} = \hat{\phi}\, r_2 d\phi$$

$$\oint_{C_2} \vec{B}_2 \cdot d\vec{l} = 2\pi\, r_2 B_{\phi 2}$$

dir. İletkenin dışındaki C_2 yolu toplam I akımını kuşatır. Bu yüzden,

$$\vec{B}_2 = \hat{\phi} B_{\phi 2} = \hat{\phi}\frac{\mu_0 I}{2\pi r_2}, \quad r_2 \geq b \qquad (1.11)$$

bulunur.

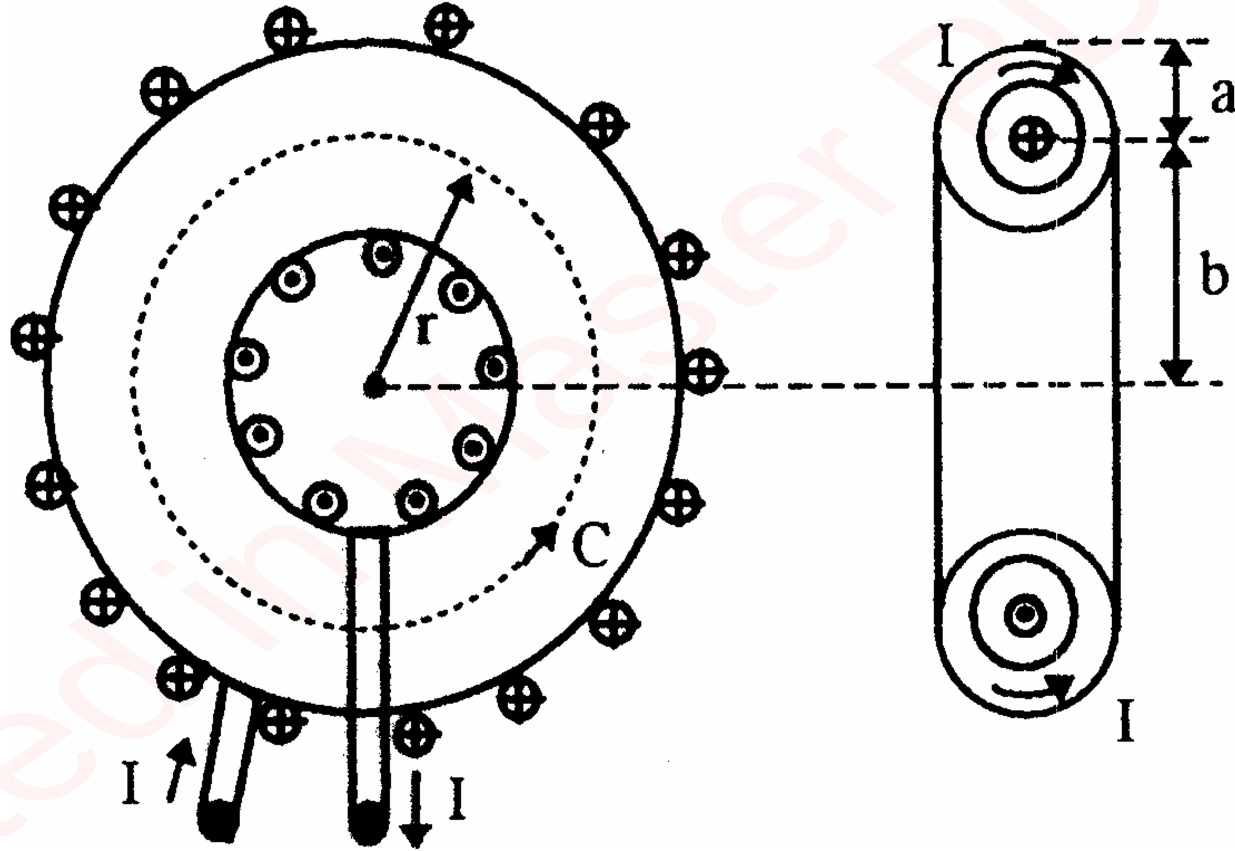
Denk.(1.10) ve (1.11) ifadeleri, B'nin büyüklüğünün 0'dan r_1=b ye kadar r_1 ile lineer olarak arttığını, daha sonra r_2 ile ters orantılı olarak azaldığını gösterir.

****

Örnek-1.2: Hava çekirdekli, N tane sıkı sarımlı ve I akımı taşıyan toroid biçimli bir bobinin iç bölgesindeki manyetik akı yoğunluğunu bulunuz. Toroidin ortalama yarıçapı b ve her bir sarımın yarıçapı a'dır.

Çözüm:

Şekil.1.3, bu problemin geometrisini göstermektedir. Problemin silindirik simetrisi, $\vec{B}$'nin sadece bir ϕ bileşenine sahip olmasını ve toroidin ekseni etrafındaki herhangi bir kapalı yol boyunca sabit kalmasını sağlar. Görüldüğü gibi r yarıçaplı dairesel bir C ilmeği oluşturulabilir.



Şekil.1.3: Akım taşıyan toroid bobin

$(b-a)<r<(b+a)$ için Denk.(1.9) doğrudan,

$$\oint_C \vec{B}\cdot d\vec{l} = 2\pi r B_\phi = \mu_0 NI$$

eşitliğini verir. Burada, toroidin μ_0 geçirgenlikli bir hava çekirdeğine sahip olduğu kabul edilmiştir. Böylece,

$$\vec{B} = \hat{\phi}B_\phi = \hat{\phi}\frac{\mu_0 NI}{2\pi r}, \quad (b-a)<r<(b+a) \qquad (1.12)$$

bulunur. $r<(b-a)$ ve $r>(b+a)$ için $\vec{B}=0$ olacağı açıktır. Çünkü bu iki bölgede oluşturulan bir çevre ile kuşatılan net toplam akım sıfırdır.

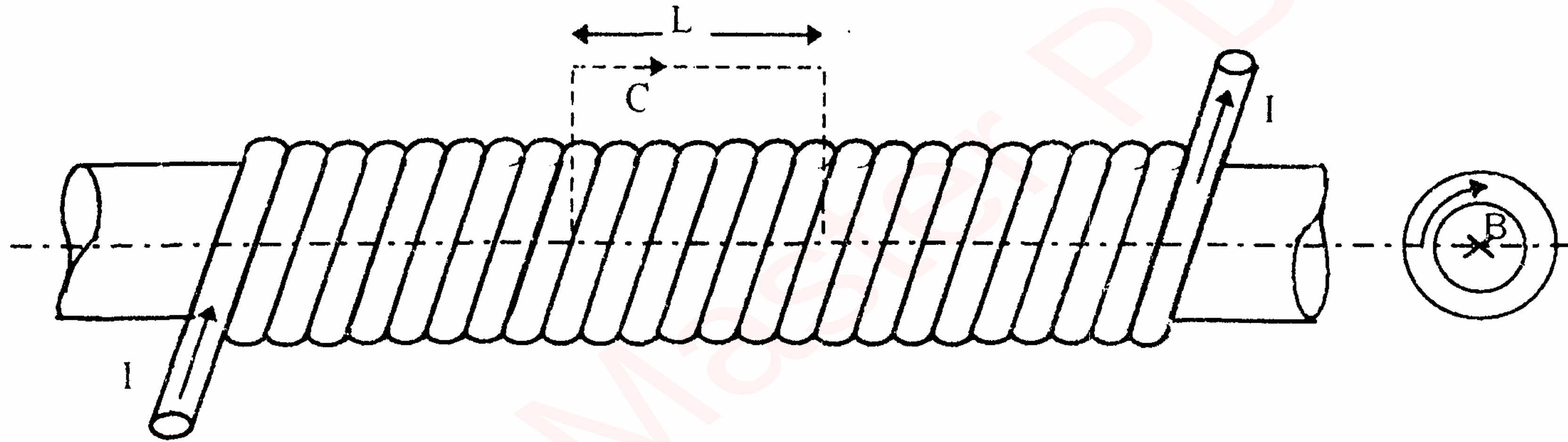
****

Örnek 1.3: Hava çekirdekli, birim uzunluk başına n tane sıkı sarıma sahip ve bir I akımı taşıyan sonsuz uzun bir solenoid içindeki manyetik akı yoğunluğunu tayin ediniz.

Çözüm: Bu problem iki şekilde çözülebilir.

a) Ampere devre kanununun doğrudan uygulanması ile:

Solenoidin dış tarafında hiçbir manyetik alanın olmayacağı açıktır. İçerdeki $\vec{B}$ alanını tayin etmek için, bir kısmı solenoidin içinde bir kısmı da dışında olan L uzunluklu dikdörtgen bir C çevresi oluşturulur. Simetri sebebiyle, içerdeki $\vec{B}$ alanı eksene paralel olmalıdır. Ampere devre kanunu uygulayarak,



Şekil.1.4: Akım taşıyan uzun selenoid

$$BL = \mu_0 nLI$$

veya

$$B = \mu_0 nI \tag{1.13}$$

elde ederiz. $\vec{B}$'nin yönü sağdan sola doğrudur. Şekil.1.4'de gösterildiği gibi, bu yön, solenoiddeki I akımının yönüne göre sağ el kuralına uyar.

b) Toroidin özel bir durumu olarak:

Düz solenoid, Örnek.1.2'deki toroidin özel bir durumu olarak kabul edilebilir. Bu durumda yarıçap sonsuz olacaktır ($b \to \infty$). Böyle bir durumda, çekirdeğin kesitinin boyutları b ile karşılaştırıldığında çok küçüktür ve çekirdeğin içindeki manyetik akı yoğunluğu yaklaşık olarak sabittir. Denk.(1.12)'den,

$$B = \mu_0 \left(\frac{N}{2\pi b} \right) I = \mu_0 n I$$

elde edilir. Bu da Denk.(1.13) ile aynıdır. Şekil.1.2'deki ϕ yönündeki $\vec{B}$ şimdi, Şekil.1.3' de gösterildiği gibi sağdan sola doğrudur.

****

1.3. MANYETİK VEKTÖR POTANSİYEL

Denk.(1.6)'daki $\nabla \cdot \vec{B} = 0$ postülatı, $\vec{B}$'nin solenoidal olduğunu ifade eder. Bunun sonucu olarak $\vec{B}$, $\vec{A}$ gibi bir başka vektörel alanın rotasyoneli olarak ifade edilebilir:

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A} \quad \text{(T)} \tag{1.14}$$

Bu şekilde tanımlanan $\vec{A}$ **vektörel alanı, manyetik vektör potansiyel olarak adlandırılır.** Bunun **SI birimi (Wb/m)'dir**. Böylece, bir akım dağılımının $\vec{A}$'sını bulabilirsek, diferansiyel (veya rotasyonel) işlemle $\vec{A}$'dan $\vec{B}$ elde edilebilir. Bu durum, elektrostatikteki rotasyoneli sıfır olan $\vec{E}$ için skaler elektrik potansiyel V'nin tanımına ve $\vec{E} = -\nabla V$ bağıntısından $\vec{E}$'nin eldesine çok benzer. Bununla beraber, **bir vektörün tanımlanması, onun hem diverjansının hem de rotasyonelinin tanımlanmasını gerektirir. Bu yüzden, $\vec{A}$'yı tanımlamak için Denk.(1.14) yalnız başına yeterli değildir, A'nın diverjansının da tanımlanması gerekir.**

$\nabla \cdot \vec{A}$' yı nasıl şeçeriz? Bu soruya cevap vermeden önce Denk.(1.14)'deki $\vec{B}$'nin rotasyonelini alalım ve bunu $\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J}$ denkleminde yerine koyalım. O zaman,

$$\nabla \times \nabla \times \vec{A} = \mu_0 \vec{J} \tag{1.15}$$

elde ederiz. Şimdi burada, bir vektörün rotasyonelinin rotasyoneli için;

$$\nabla \times \nabla \times \vec{A} = \nabla(\nabla \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A} \tag{1.16a}$$

$$\nabla^2 \vec{A} = \nabla(\nabla \cdot \vec{A}) - \nabla \times \nabla \times \vec{A} \tag{1.16b}$$

eşitlikleri yazılabilir. Denk.(1.16a) veya (1.16b), $\nabla^2 \vec{A}$'nın tanımı olarak kabul edilebilir ($\vec{A}$'nın Lapyesyeni). Kartezyen koordinatlar için, doğrudan yerine konarak,

$$\nabla^2 \vec{A} = \hat{x}\nabla^2 A_x + \hat{y}\nabla^2 A_y + \hat{z}\nabla^2 A_z \tag{1.17}$$

olduğu doğrulanabilir. Bu yüzden, kartezyen koordinatlar için, bir $\vec{A}$ vektörel alanının Laplasyeni, bileşenleri $\vec{A}$'nın karşı gelen bileşenlerinin Laplasyeni (gradyentin diverjansı) olan diğer bir vektörel alandır. Bununla beraber bu sonuç, diğer koordinat sistemleri için doğru değildir.

Şimdi, Denk.(1.15)'deki $\nabla \times \nabla \times \vec{A}$, Denk.(1.16a)'ya uygun olarak açılırsa,

$$\nabla(\nabla \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A} = \mu_0 \vec{J} \tag{1.18}$$

elde edilir. Bu denklemi mümkün olduğu kadar büyük çapta basitleştirmek amacıyla,

$$\nabla \cdot \vec{A} = 0 \qquad (1.19)$$

seçilir. (**Not:** Bu denklem statik manyetik alanlar için geçerlidir. Zamanla değişen elektromanyetik alanlar için değişiklik gerekir.) Bu durumda $\nabla\left(\nabla \cdot \vec{A}\right) - \nabla^2 \vec{A} = \mu_0 \vec{J}$ denklemi,

$$\nabla^2 \vec{A} = -\mu_0 \vec{J} \qquad (1.20)$$

halini alır. Bu bir **vektörel Poisson denklemidir**. Denk.(1.20), kartezyen koordinatlarda üç skaler Poisson denklemine eşdeğerdir:

$$\nabla^2 A_x = -\mu_0 J_x \qquad (1.21a)$$

$$\nabla^2 A_y = -\mu_0 J_y \qquad (1.21b)$$

$$\nabla^2 A_z = -\mu_0 J_z \qquad (1.21c)$$

Bu üç denklemin her biri, elektrostatikteki Poisson denklemi ile matematiksel olarak aynıdır. Serbest uzayda,

$$\nabla^2 V = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

denkleminin

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\iiint_{V'} \frac{\rho}{R} dv'$$

şeklinde bir özel çözüme sahip olduğunu bilmekteyiz. Buradan Denk.(1.21a)'daki $\nabla^2 A_x = -\mu_0 J_x$ denkleminin çözümü için,

$$A_x = \frac{\mu_0}{4\pi}\iiint_{V'} \frac{J_x}{R} dv'$$

yazılabilir. A_y ve A_z için de benzer çözümler yazılabilir. Üç bileşen birleştirilerek, Denk.(1.20) ile verilen $\nabla^2 \vec{A} = -\mu_0 \vec{J}$ denklemi için,

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi}\iiint_{V'} \frac{\vec{J}}{R} dv' \quad \text{(Wb/m)} \qquad (1.22)$$

çözümü elde edilir. Bu denklem, hacimsel akım yoğunluğu $\vec{J}$'den $\vec{A}$ manyetik vektör potansiyelinin bulunmasını sağlar. O zaman $\vec{B}$ manyetik akı yoğunluğu, statik $\vec{E}$ elektrik alanını $-\nabla V$'den elde etmeye benzer bir şekilde, diferansiyelle $\nabla \times \vec{A}$'dan elde edilebilir.

Vektörel potansiyel A, C çevresi ile sınırlı verilen bir S alanından geçen Φ manyetik akısına basit bir şekilde bağlanır:

$$\Phi = \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{s} \quad \text{(Wb)} \tag{1.23}$$

Manyetik akının SI birimi tesla-metrekare ($T.m^2$) veya Weber'dir. (Weber, volt-saniye ile aynıdır.) Denk.(1.14) ve Stokes teoremi kullanılarak,

$$\Phi = \iint_S \left(\nabla \times \vec{A}\right) \cdot d\vec{s} = \oint_C \vec{A} \cdot d\vec{l} \quad \text{(Wb)} \tag{1.24}$$

elde edilir.

1.4. BIOT-SAVART KANUNU VE UYGULAMALARI

Pek çok uygulamada, akım taşıyan bir devrenin oluşturduğu manyetik alanın belirlenmesi problemiyle ilgileniriz. **S kesit alanlı ince bir tel için** $dv' = S\,dl'$ dir ve akımın akış doğrultusu tamamen tel boyuncadır. Bu durumda,

$$\vec{J}\,dv' = \vec{J}S\,dl' = I\,d\vec{l}\,' \qquad (1.25)$$

yazılır ve $\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi}\iiint_{V'}\frac{\vec{J}}{R}dv'$ denklemi,

$$\vec{A} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\oint_{C'}\frac{d\vec{l}\,'}{R} \quad \text{(Wb/m)} \qquad (1.26)$$

haline gelir. Burada integral işaretinin üzerine bir daire konulmuştur çünkü, I akımı kapalı bir yol içinde akmalıdır ve burada bu yol C' ile gösterilmiştir.

NOT: Şimdilik, kararlı manyetik alanları oluşturan doğru (zamanla değişmeyen) akımlarla ilgileniyoruz. Zamanla değişen kaynaklar içeren devreler, açık bir tel boyunca zamanla değişen akımlar gönderebilir ve telin uçlarında yükler biriktirilir. Antenler bu duruma örnektir.

Bu durumda manyetik akı yoğunluğu,

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A} = \nabla \times \left[\frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint_{C'} \frac{d\vec{l}\,'}{R} \right] = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint_{C'} \nabla \times \left(\frac{d\vec{l}\,'}{R} \right) \qquad (1.27)$$

olur. Denk.(1.27)'deki üssüz rotasyon işleminin, alan noktasının uzayın koordinatlarına göre diferansiyeller içerdiğine ve integral işleminin üslü kaynak koordinatlarına göre olduğuna dikkat edilmelidir. Denk.(1.27)'deki integrand, aşağıdaki özdeşliği kullanarak, iki terim haline açılabilir:

$$\nabla \times \left(f\,\vec{G} \right) = f\left(\nabla \times \vec{G} \right) + \left(\nabla f \right) \times \vec{G} \qquad (1.28)$$

$f = 1/R$ ve $\vec{G} = d\vec{l}\,'$ alınarak,

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint_{C'} \left[\frac{1}{R} \nabla \times d\vec{l}\,' + \left(\nabla \frac{1}{R} \right) \times d\vec{l}\,' \right] \qquad (1.29)$$

elde edilir. Şimdi üslü ve üssüz koordinatlar bağımsız olduklarından, $\nabla \times d\vec{l}'$ sıfıra eşittir ve Denk.(1.29) ile verilen $\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint_{C'} \left[\frac{1}{R} \nabla \times d\vec{l}' + \left(\nabla \frac{1}{R} \right) \times d\vec{l}' \right]$ denkleminin sağındaki ilk terim sıfır olur. R mesafesi, (x', y', z')'deki $d\vec{l}'$'den (x,y,z)'deki alan noktasına doğru ölçülür. Böylece,

$$\frac{1}{R} = \left[(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2 \right]^{-1/2}$$

$$\begin{aligned} \nabla\left(\frac{1}{R}\right) &= \hat{x}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{R}\right) + \hat{y}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{R}\right) + \hat{z}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{R}\right) \\ &= -\frac{\hat{x}(x - x') + \hat{y}(y - y') + \hat{z}(z - z')}{\left[(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2\right]^{3/2}} \\ &= -\frac{\vec{R}}{R^3} = -\hat{R}\frac{1}{R^2} \end{aligned} \qquad (1.30)$$

elde edilir. Burada $\hat{R}$, kaynak noktasından alan noktasına yönelmiş birim vektördür.

$\nabla^2 \vec{A} = -\mu_0 \vec{J}$ denklemi $\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint_{C'} \left[\frac{1}{R} \nabla \times d\vec{l}\,' + \left(\nabla \frac{1}{R} \right) \times d\vec{l}\,' \right]$ denkleminde kullanılarak,

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint_{C'} \frac{d\vec{l}\,' \times \hat{R}}{R^2} \qquad (1.31)$$

elde edilir. Bu denklem **Biot-Savart kanunu** olarak bilinir. Kapalı bir C' ilmeğindeki bir I akımı tarafından oluşturulan $\vec{B}$'yi belirlemede kullanılan bir formüldür ve $\vec{A} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint_{C'} \frac{d\vec{l}\,'}{R}$ denklemindeki $\vec{A}$'nın rotasyoneli alınarak elde edilmiştir. Bazen Denk.(1.31)'i iki adımda yazmak daha kullanışlı olur:

$$\vec{B} = \oint_{C'} d\vec{B} \quad \text{(T)} \qquad (1.32)$$

burada,

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\left(\frac{d\vec{l}' \times \hat{R}}{R^2}\right) \quad \text{(T)} \qquad (1.33a)$$

dir ve $I d\vec{l}'$ akım elemanının oluşturduğu manyetik akı yoğunluğudur. Denk.(1.33a) için değişik ve bazen daha kullanışlı olan bir biçim,

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\left(\frac{d\vec{l}' \times \vec{R}}{R^3}\right) \quad \text{(T)} \qquad (1.33b)$$

dir. Denk.(1.31) ile Denk.(1.9)'un karşılaştırılması, genelde, Biot-Savart kanununu uygulamanın Ampere devre kanununu uygulamaktan daha zor olduğunu gösterir. Bununla beraber, $\vec{B}$'nin sahip bir büyüklüğe sahip olduğu kapalı bir yol bulunmazsa, bir devredeki I akımından $\vec{B}$'nin eldesi için Ampere devre kanunu kullanılamaz.

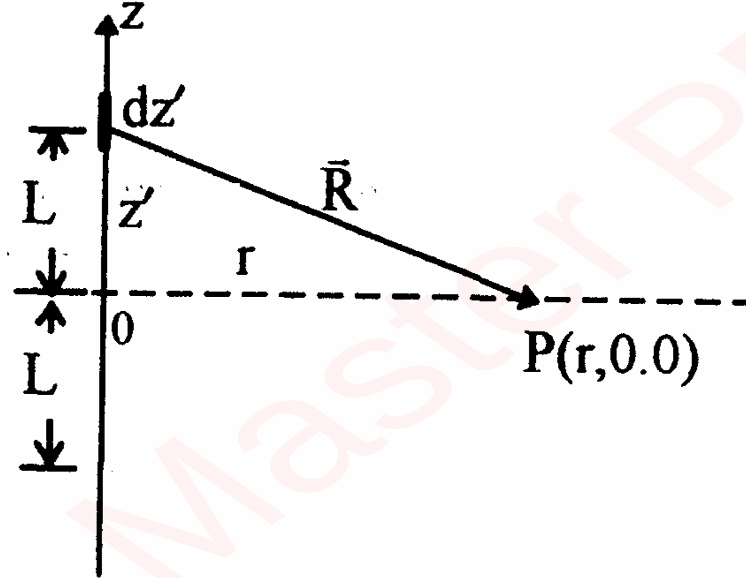
****

Örnek 1.4: 2L uzunluğundaki düzgün bir telden I doğru akımı geçmektedir. Teli tam ikiye bölen düzlem üzerinde, telden r uzaklıkda bulunan bir noktada $\vec{B}$ manyetik akı yoğunluğunu,

a) İlk önce $\vec{A}$ vektörel potansiyelini bularak,

b) Biot-Savart kanununu uygulayarak elde ediniz.

Çözüm:



Şekil.1.5: Akım taşıyan doğrusal tel

Akımlar sadece kapalı alınabileceğinden, mevcut problemdeki tel, çeşitli düz kenarları olan akım taşıyan bir ilmeğin bir parçası olmalıdır. Devrenin geri kalan kısmını bilmediğimizden, Ampere devre kanunu uygulanamaz. Şekil.1.5'e dikkat

edilirse, akım taşıyan tel parçası z ekseni doğrultusundadır. Tel üzerindeki tipik bir uzunluk elemanı,

$$d\vec{l}' = \hat{z}dz'$$

dür. P gözlem noktasının silindirik koordinatları (r,0,0) dır.

a) $\vec{B}$'nin $\nabla \times \vec{A}$'dan bulunması:

Denk.(1.26)'da R yerine,

$R = \sqrt{z'^2 + r^2}$ yazılarak,

$$\vec{A} = \hat{z}\frac{\mu_0 I}{4\pi}\int_{-L}^{+L}\frac{dz'}{\sqrt{z'^2 + r^2}}$$

$$= \hat{z}\frac{\mu_0 I}{4\pi}\left[\ln\left(\frac{z' + \sqrt{z'^2 + r^2}}{r}\right)\right]_{-L}^{+L} \qquad (1.34)$$

$$= \hat{z}\frac{\mu_0 I}{4\pi}\ln\frac{\left(L^2 + r^2\right)^{1/2} + L}{\left(L^2 + r^2\right)^{1/2} - L}$$

elde edilir. Bu yüzden,

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A} = \nabla \times \left(\hat{z} A_z\right) = \hat{r}\frac{1}{r}\frac{\partial A_z}{\partial \phi} - \hat{\phi}\frac{\partial A_z}{\partial r}$$

olur. Telin etrafındaki silindirik simetri,

$$\frac{\partial A_z}{\partial \phi} = 0$$

olmasını sağlar. Böylece,

$$\begin{aligned} \vec{B} &= -\hat{\phi}\frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{\mu_0 I}{4\pi}\ln\frac{\left(L^2+r^2\right)^{1/2}+L}{\left(L^2+r^2\right)^{1/2}-L}\right] \\ &= \hat{\phi}\frac{\mu_0 I L}{2\pi r\left(L^2+r^2\right)^{1/2}} \end{aligned} \qquad (1.35)$$

elde edilir. $r << L$ olduğu zaman Denk.(1.35),

$$\vec{B} = \hat{\phi}\frac{\mu_0 I}{2\pi r} \qquad (1.36)$$

haline gelir. Bu sonuç da, sonsuz uzun, düz ve I akımı taşıyan bir telden r uzaklığındaki bir noktada $\vec{B}$ için elde edilen ifadenin aynısıdır.

b) Biot-Savart kanununun uygulanması:

Şekil.1.5'den, dz' kaynak elemanından P alan noktasına olan uzaklık vektörünün,

$$\hat{R} = \hat{r}r - \hat{z}z'$$

olduğu görülebilir.

$$d\vec{l}\,' \times \vec{R} = \hat{z}dz' \times \left(\hat{r}r - \hat{z}z'\right) = \hat{\phi}rdz'$$

eşitliği Denk.(1.33b)'de kullanılarak,

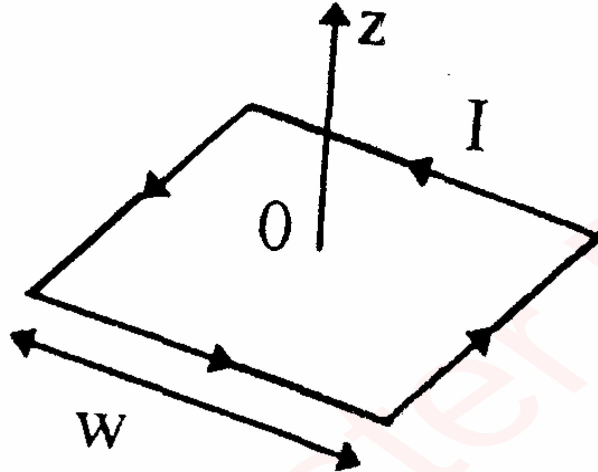
$$\vec{B} = \int d\vec{B} = \hat{\phi}\frac{\mu_0 I}{4\pi}\int_{-L}^{+L}\frac{rdz'}{\left(z'^2 + r^2\right)^{3/2}}$$

$$= \hat{\phi}\frac{\mu_0 IL}{2\pi r\sqrt{L^2 + r^2}}$$

elde edilir. Buda Denk.(1.35)'le aynıdır.

****

Örnek 1.5: I akımı taşıyan ve kenar uzunluğu w olan kare şeklindeki bir ilmeğin merkezindeki manyetik akı yoğunluğunu bulunuz.



Şekil.1.6: Akım taşıyan kare halka

Çözüm:

Şekil.1.6'da gösterildiği gibi, ilmeğin x-y düzleminde olduğunu kabul edelim. Kare ilmeğin merkezindeki manyetik akı yoğunluğu, w uzunluğundaki tek bir kenarının oluşturduğu manyetik akı yoğunluğun dört katına eşittir. Denk.(1.35)'de L=r=w/2 alınarak,

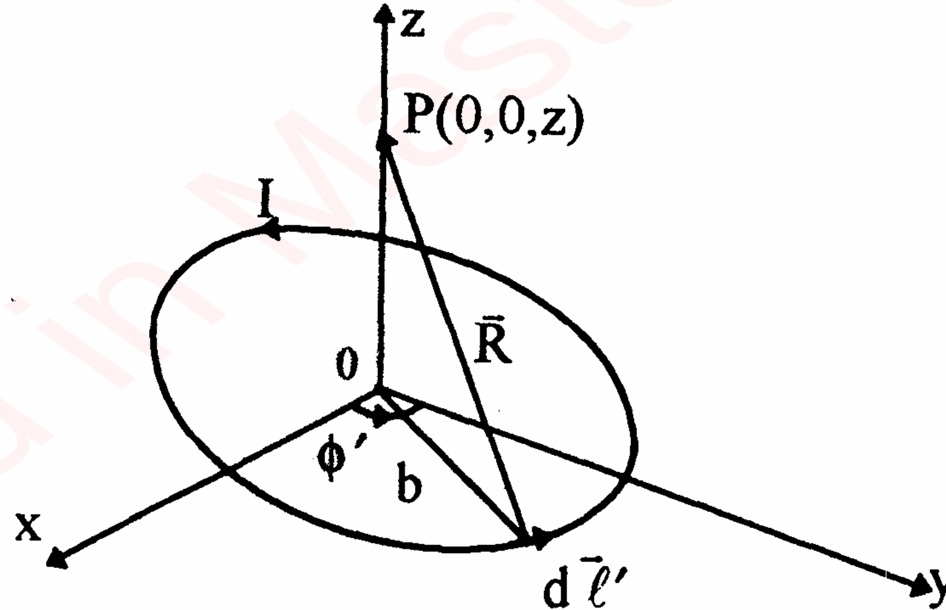
$$\vec{B} = \hat{z}\frac{\mu_0 I}{\sqrt{2}\pi w}.4 = \hat{z}\frac{2\sqrt{2}\mu_0 I}{\pi w} \quad (1.37)$$

elde edilir. $\vec{B}$'nin ve ilmekteki akımın yönü sağ-el kuralına uygundur.

****

Örnek 1.6: I doğru akımı taşıyan b yarıçaplı dairesel ilmeğin ekseni üzerindeki herhangi bir noktada manyetik akı yoğunluğunu bulunuz.

Çözüm: Şekil.1.7'deki ilmeğe Biot-Savart kanununu uygulayalım. Bunun için,

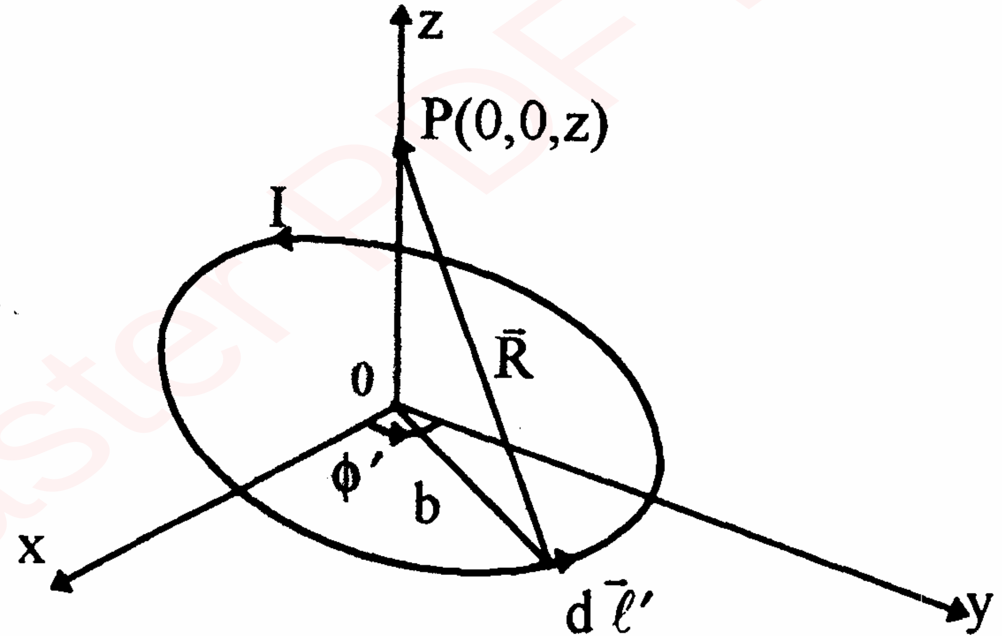


Şekil.1.7: I akımı taşıyan dairesel halka

$$d\vec{l}\,' = \hat{\phi} b d\phi' \qquad \vec{R} = \hat{z}z - \hat{r}b \qquad R = \left(z^2 + b^2\right)^{1/2}$$

dir. Yine, $\vec{R}$'nin $d\vec{l}\,'$ kaynak elemanından P alan noktasına olan konum vektörü olduğunu hatırlatalım. Bu durumda,

$$d\vec{l}\,' \times \vec{R} = \hat{\phi}\, b d\phi' \times \left(\hat{z}z - \hat{r}b\right)$$
$$= \hat{r}\, bz d\phi' + \hat{z}\, b^2 d\phi'$$



elde edilir. Silindirik simetriden dolayı, $\hat{r}$ bileşeninin $d\vec{l}\,'$'nün karşısında bulunan elemanın katkısıyla yok edileceği kolayca görülebilir. Bu yüzden, bu vektörel çarpımın sadece $\hat{z}$ bileşeninin göz önüne alınması gerekir. Denk.(1.31)'den,

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_0^{2\pi} \hat{z} \frac{b^2 d\phi'}{\left(z^2 + b^2\right)^{3/2}}$$

veya

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I b^2}{2\left(z^2 + b^2\right)^{3/2}} \quad (\text{T}) \qquad (1.38)$$

bulunur.

****

1.5. MANYETİK DİPOL

Bu kısma bir örnekle başlayacağız.

****

Örnek 1.7: I akımı taşıyan küçük dairesel bir ilmeğin uzağında bulunan bir noktadaki manyetik akı yoğunluğunu bulunuz.

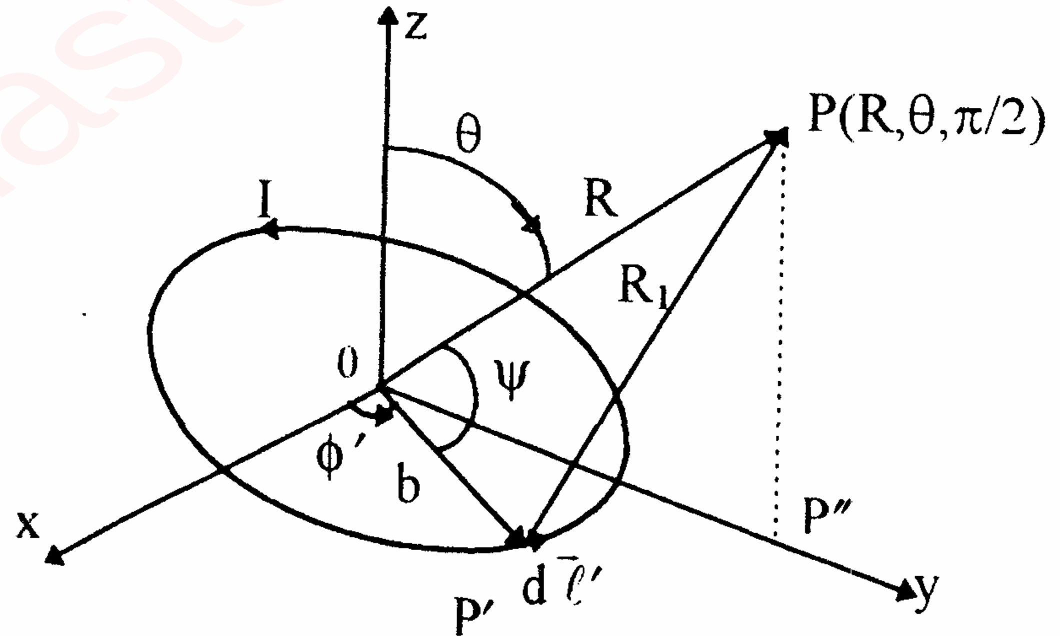
Çözüm:

Problemin ifadesinden, $\vec{B}$'yi bulmak istediğimiz noktanın, ilmeğin merkezine göre noktanın konum vektörü R olmak üzere, R>>b ilişkisini sağladığı açıktır. Bu durumda belli basitleştirme yaklaşımları yapılabilir.

İlmeğin merkezi, Şekil.1.8'de gösterildiği gibi, küresel koordinatların orijini olarak seçilebilir. Kaynak koordinatları üslüdür. İlk önce $\vec{A}$ vektörel manyetik potansiyelini, sonra da $\nabla \times \vec{A}$ ile $\vec{B}$ bulunur.

$$\vec{A} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint_{C'} \frac{d\vec{l}\,'}{R_1} \qquad (1.39)$$

Bu denklem, bir önemli nokta haricinde Denk.(1.26) ile verilen $\vec{A} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint_{C'} \frac{d\vec{l}'}{R}$ denklemiyle aynıdır. Denk.(1.26)'da R, P''deki $d\vec{l}'$ kaynak elemanı ile P alan noktası arasındaki uzaklığı gösterir. Ancak, burada Şekil.1.8'e uygun olarak R yerine R_1 kullanılmıştır. Manyetik alanın, simetriden dolayı alan noktasının ϕ koordinatlarından bağımsız olduğu açıktır. y-z düzleminde $P(R,\theta,\pi/2)$ noktasını seçelim.



Şekil.1.8: I akımı taşıyan küçük dairesel halka

Diğer bir önemli nokta, $d\vec{l}\,'$'deki $\hat{\phi}$'nın P noktasındaki $\hat{\phi}$ ile aynı olmamasıdır. Gerçekten, P'deki $\hat{\phi}$, Şekil.1.8'de gösterildiği gibi $-\hat{x}$ ile aynıdır ve

$$d\vec{l}\,' = (-\hat{x}\sin\phi' + \hat{y}\cos\phi')b\,d\phi' \tag{1.40}$$

dır. Her $Id\vec{l}\,'$ için y ekseninin diğer tarafında simetrik olarak bulunan bir başka akım elemanı vardır ve bu eleman, $-\hat{x}$ yönünde, $\vec{A}$'ya eşit miktarda katkıda bulunacaktır ancak, $\hat{y}$ yönündeki $Id\vec{l}\,'$'nün katkısı yok edilecektir. Denk.(1.39) şu şekilde yazılabilir.

$$\vec{A} = -\hat{x}\frac{\mu_0 I}{4\pi}\int_0^{2\pi}\frac{b\sin\phi'}{R_1}d\phi'$$

veya

$$\vec{A} = \hat{\phi}\frac{\mu_0 Ib}{2\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\frac{\sin\phi'}{R_1}d\phi' \tag{1.41}$$

OPP' üçgenine kosinüs teoremi uygulanırsa,

$$R_1^2 = R^2 + b^2 - 2bR\cos\psi$$

elde edilir. Burada $R\cos\psi$, R'nin OP' yarıçapı üzerindeki izdüşümüdür. Bu da OP'''nün OP' üzerindeki ($OP'' = R\sin\theta$) izdüşümü ile aynıdır. Böylece,

$$R_1^2 = R^2 + b^2 - 2Rb\sin\theta\sin\phi'$$

$$\frac{1}{R_1} = \frac{1}{R}\left(1 + \frac{b^2}{R^2} - \frac{2b}{R}\sin\theta\sin\phi'\right)^{-1/2}$$

yazılabilir. $R^2 >> b^2$ olduğu zaman, b^2/R^2, birin yanında ihmal edilebilecek durumda,

$$\begin{aligned}\frac{1}{R_1} &\cong \frac{1}{R}\left(1 - \frac{2b}{R}\sin\theta\sin\phi'\right)^{-1/2} \\ &\cong \frac{1}{R}\left(1 + \frac{b}{R}\sin\theta\sin\phi'\right)\end{aligned} \qquad (1.42)$$

yazılabilir. Denk.(1.42)'nin Denk.(1.41)'de verilen $\vec{A} = \hat{\phi}\dfrac{\mu_0 Ib}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\frac{\sin\phi'}{R_1}d\phi'$

denkleminde kullanılması,

$$\vec{A} = \hat{\phi}\frac{\mu_0 Ib}{2\pi R}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\left(1+\frac{b}{R}\sin\theta\sin\phi'\right)\sin\phi' d\phi'$$

veya

$$\vec{A} = \hat{\phi}\frac{\mu_0 Ib^2}{2R^2}\sin\theta \qquad (1.43)$$

eşitliğini verir. Manyetik akı yoğunluğu $\vec{B} = \nabla\times\vec{A}$ dır. Küresel koordinatlarda,

$$\nabla\times\vec{A} = \frac{1}{R^2\sin\theta}\begin{vmatrix} \hat{R} & \hat{\theta}R & \hat{\phi}R\sin\theta \\ \frac{\partial}{\partial R} & \frac{\partial}{\partial\theta} & \frac{\partial}{\partial\phi} \\ A_R & RA_\theta & R\sin\theta A_\phi \end{vmatrix}$$

olduğundan,

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 Ib^2}{4R^3}\left(\hat{R}2\cos\theta + \hat{\theta}\sin\theta\right) \qquad (1.44)$$

bulunur. Bu noktada, Denk.(1.44) ile, bir elektrik dipolün uzak alan elektrik alan şiddeti için elde edilen ifade arasındaki benzerlik hemen görülebilir. Daha fazla benzerlik araştırması için Denk.(1.43),

$$\vec{A} = \hat{\phi}\frac{\mu_0\left(I\pi b^2\right)}{4\pi R^2}\sin\theta$$

veya

$$\vec{A} = \frac{\mu_0 \vec{m}\times\hat{R}}{4\pi R^2} \quad \text{(Wb/m)} \tag{1.45}$$

şeklinde yeniden düzenlenir. Burada,

$$\vec{m} = \hat{z}I\pi b^2 = \hat{z}IS = \hat{z}m \quad (\text{A.m}^2) \tag{1.46}$$

manyetik dipol moment olarak tanımlanır. Bu nicelik, ilmeğin alanı ile içindeki akımın çarpımı olan bir büyüklüğe sahip ve yönü, sağ elin parmakları akım yönünde olduğu zaman, baş parmağın gösterdiği yön olan bir vektördür. Denk.(1.45)'i, bir elektrik dipolün skaler elektrik potansiyeli için elde edilen

$$V = \frac{\vec{p}.\hat{R}}{4\pi\varepsilon_0 R^2} \quad \text{(V)} \qquad (1.47)$$

ifadesi ile karşılaştırınca, $\vec{A}$'nın V'ye benzediği görülür. **Akım taşıyan küçük bir ilmek manyetik dipol olarak adlandırılır.** Benzer, bir biçimde, Denk(1.44) de,

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 m}{4\pi R^3}\left(\hat{R}2\cos\theta + \hat{\theta}\sin\theta\right) \quad \text{(T)} \qquad (1.48)$$

şeklinde yazılabilir. p'nin m ile yer değiştirmesi haricinde, Denk.(1.48), bir elektrik dipolün uzak $\vec{E}$ alanı için elde edilen ifadeyle aynı biçime sahiptir. Böylece, xy düzlemindeki bir manyetik dipolün manyetik akı çizgilerinin, z ekseni boyunca yerleşmiş bir elektrik dipolün elektrik alan çizgileri ile aynı biçime sahip olacağı anlaşılır. **Temel fark şudur:** Bir elektrik dipolün elektrik alan çizgileri, +q pozitif yükünden çıkıp -q negatif yük üzerinde sonlanan çizgiler olmasına rağmen, manyetik akı çizgileri kendi üzerlerine kapanırlar.

****

NOT: Dairesel bir ilmek için elde edilen Denk.(1.48) ile verilen ifadelerin, dikdörtgen bir ilmek için de geçerli olduğu gösterilebilir. Yine $\boldsymbol{m} = \boldsymbol{IS}$ dir.

1.5.1 Skaler Manyetik Potansiyel

Akımın olmadığı bir bölgede $\vec{J} = \mathbf{0}$'dır ve Denk.(1.7)

$$\nabla \times \vec{B} = \mathbf{0} \qquad (1.49)$$

haline gelir. Bu durumda, $\vec{B}$ manyetik akı yoğunluğunun rotasyoneli sıfır olur ve skaler bir alanın gradyenti olarak ifade edilebilir. Şimdi

$$\vec{B} = -\mu_0 \nabla V_m \qquad (1.50)$$

olsun. Burada V_m skaler manyetik potansiyel olarak adlandırılır ve Ampere olarak ifade edilir. Denk.(1.50)'deki negatif işaret geleneksel olarak konur (skaler elektrik potansiyel V'nin tanımına bakınız) ve serbest uzayın geçirgenliği μ_0 basit bir orantı sabitidir.

$$V_2 - V_1 = -\int_{P_1}^{P_2} \vec{E} . d\vec{l} \quad \text{(v)}$$

ifadesine benzeterek, serbest uzayda, P_1 veP_2 noktaları arasında skaler manyetik potansiyel farkı,

$$V_{m2} - V_{m1} = -\int_{P_1}^{P_2} \frac{1}{\mu_0} \vec{B}.d\vec{l} \qquad (1.51)$$

şeklinde yazılabilir.

Eğer bir V' hacminde bir ρ_m (A/m^2)'lik hacimsel yoğunluklu manyetik yükler olsaydı, V_m

$$V_m = \frac{1}{4\pi} \int_{V'} \frac{\rho_m}{R} dv' \text{ (A)} \qquad (1.52)$$

eşitliğinden bulunabilirdi. O zaman, B manyetik akı yoğunluğu da Denk.(1.50)'den bulunurdu. Bununla beraber, yalıtılmış manyetik yükler deneysel olarak hiç gözlenmemiş olduğundan, hayali olarak kabul edilmelidirler. Yine de, matematiksel (fiziksel değil) bir modelde hayali manyetik yüklerin kabulü, hem elektrostatikteki bilgilerimiz vasıtasıyla bazı manyetostatik bağıntıları tartışmayı, hem de

manyetizmanın manyetik kutuplar kavramı ile manyetizmanın kaynakları olarak alınan mikroskobik dolanım akımları arasında bir köprü kurmaya yarar.

Küçük bir mıknatısın manyetik alanı, bir manyetik dipoldeki ile aynıdır. Bu, bir mıknatısın etrafındaki demir tozlarının meydana getirdiği ilmekler gözlenerek, deneysel olarak gerçeklenebilir. Geleneksel anlayış şudur: Sürekli bir mıknatısın uçları (kuzey ve güney kutuplar) sırasıyla pozitif ve negatif yüklerin yerleridir. Bir çubuk mıknatıs içi, $+q_m$ ve-q_m hayali manyetik yüklerin bir d mesafesi kadar ayrıldığı ve

$$\vec{m} = q_m\vec{d} = \hat{n}IS \qquad (1.53)$$

momentine sahip eşdeğer bir manyetik dipol oluşturduğu kabul edilir. Bu manyetik dipol tarafından oluşturulan V_m skaler manyetik potansiyeli bu durumda, bir elektrik dipol tarafından oluşturulan skaler elektrik potansiyeli bulmak için kullanılan işlem takip edilerek bulunabilir.

$$V = \frac{\vec{p}.\hat{R}}{4\pi\varepsilon_0 R^2} \quad (V)$$

denklemindeki gibi,

$$V_m = \frac{\vec{m}.\hat{R}}{4\pi R^2} \quad (A) \tag{1.54}$$

elde edilir. Denk.(1.54)'ün Denk.(1.50)' de yerine konması, Denk.(1.48)'deki $\vec{B}$'yi verir.

Bir manyetik dipolün Denk.(1.54)'deki V_m skaler manyetik potansiyel ifadesi, bir elektrik dipolün Denk.(1.47)'deki V skaler potansiyel ifadesine tam olarak benzer; A manyetik vektör potansiyeli (Denk.1.45) ile V (Denk.1.47) arasındaki benzerlik tam değildir. Bununla beraber, pratik problemlerde, manyetik yükler olamadığından, V_m bir akım dağılımından elde edilmelidir. Bu genellikle basit bir işlem değildir. Üstelik Denk.(1.49)'da görülen B'nin rotasyonelinin sıfır olması (ki buradan V_m skaler manyetik potansiyeli tanımlanmıştır), sadece, hiçbir akımın olmadığı noktalarda

geçerlidir. Akımların bulunduğu bir bölgede manyetik alan korunumlu (konservatif) değildir ve skaler manyetik potnasiyel tek değerli değildir; böylece, Denk.(1.51) ile bulunan manyetik potansiyel farkı integral yoluna bağlı olur. Bu sebeplerle, manyetik malzemelerdeki manyetik alanları incelerken, hayali manyetik yük ve skaler potansiyel yaklaşımı yerine, dolanım akımı ve vektörel potansiyel yaklaşımını kullanacağız. Bir çubuk mıknatısın makroskopik özellikleri, orbitallerde dolanan ve kendi etrafında dönen (spin) elektronlar tarafından oluşturulan atomik akınlara (Amperik akımlar) bağlanır.

1.6. MIKNATISLANMA VE EŞDEĞER AKIM YOĞUNLUKLARI

Maddenin elementer atomik modeline göre bütün malzemeler; pozitif yüklü bir çekirdek ve orbitallerde dönen negatif yüklü çok sayıda elektrondan oluşmuş atomlardan meydana gelir. **Orbitallerde dolanan elektronlar dolanım akımlarını oluştururlar ve mikroskobik manyetik dipolleri meydana getirirler**. Ek olarak, **bir atomun hem elektronları ve hem de çekirdeği, belli manyetik dipol momentlerle kendi eksenleri etrafında dönerler (spin)**. **Kendi etrafında dönen bir çekirdeğin manyetik dipol momenti, yörüngede (orbital) dolaşan veya kendi ekseni etrafında dönen bir elektronunkine göre genellikle ihmal edilir çünkü, çekirdeğin kütlesi daha büyük ve açısal hızı daha küçüktür.**

Bir harici manyetik alanın yokluğunda, pek çok malzemenin atomlarının manyetik dipolleri (sürekli mıknatıslar hariç) rasgele yönelmişlerdir. Bunun sonucu olarak, hiçbir net manyetik momente sahip değillerdir. **Bir dış manyetik alanın uygulanması**, hem kendi eksenleri etrafında dönen elektronların manyetik

momentlerinin sıraya sokulması ve hem de elektronların yörünge hareketlerindeki bir değişimden dolayı, indüklenmiş bir manyetik momente sebep olur. **Bir manyetik malzemenin varlığının yol açtığı, manyetik akı yoğunluğundaki büyüklük değişimini belirlemek için** bir formül elde etmek amacıyla, **bir atomun manyetik dipol momentine** $\vec{m}_k$ diyelim. Eğer birim hacimde n tane atom varsa, **mıknatıslanma vektörü** $\vec{M}$**,**

$$\vec{M} = \lim_{\Delta v \to 0} \frac{\sum_{k=1}^{n\Delta v} \vec{m}_k}{\Delta v} \quad \text{(A/m)} \qquad (1.55)$$

şeklinde tanımlanır. Bu nicelik, **hacimsel manyetik dipol momenti yoğunluğudur**. Elemanter bir dv' hacminin $\vec{d}_m$ manyetik dipol momenti $\vec{d}_m = \vec{M}dv'$ dür. Denk(1.45)'e uygun olarak bu moment bir manyetik vektör potansiyel üretecektir:

$$d\vec{A} = \frac{\mu_0 \vec{M}.\hat{R}}{4\pi R^2} dv' \qquad (1.56)$$

$\nabla'\left(\frac{1}{R}\right) = \frac{\hat{R}}{R^2}$ olduğundan, bu denklem,

$$d\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi}\vec{M} \times \nabla'\left(\frac{1}{R}\right)dv'$$

olarak yazılabilir. Böylece,

$$\vec{A} = \iiint_{V'} d\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi}\iiint_{V'} \vec{M} \times \nabla'\left(\frac{1}{R}\right)dv' \qquad (1.57)$$

elde edilir. Burada V' mıknatıslanmış malzemenin hacmidir. Şimdi, Denk.(1.28)'deki vektörel özdeşliği kullanarak,

$$\vec{M} \times \nabla'\left(\frac{1}{R}\right) = \frac{1}{R}\nabla' \times \vec{M} - \nabla' \times \left(\frac{\vec{M}}{R}\right) \qquad (1.58)$$

yazılır ve Denk.(1.57)'nin sağ yanını iki terim halinde açılırsa,

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi}\iiint_{V'} \frac{\nabla' \times \vec{M}}{R}dv' - \frac{\mu_0}{4\pi}\iiint_{V'} \nabla' \times \left(\frac{\vec{M}}{R}\right)dv' \qquad (1.59)$$

elde edilir. Aşağıdaki vektörel özdeşlik, bir vektörün rotasyonelinin hacim integralinin yüzey integraline dönüştürülmesini sağlar.

$$\iiint_{V'} \nabla' \times \vec{F}\, dv' = -\oint\!\!\oint_{S'} \vec{F} \times d\vec{S}' \qquad (1.60)$$

Burada $\vec{F}$, birinci türevi sürekli olan herhangi bir vektördür. Denk.(1.59)'dan

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{V'} \frac{\nabla' \times \vec{M}}{R}\, dv' + \frac{\mu_0}{4\pi} \oint\!\!\oint_{S'} \frac{\vec{M} \times \hat{n}'}{R}\, dS' \qquad (1.61)$$

elde edilir. Burada $\hat{n}'$, ds''den dışarı doğru yönelmiş dik birim vektör ve S', V' hacmini kuşatan yüzeydir. Denk.(1.61)'in sağındaki ifadelerin, hacimsel akım yoğunluğu $\vec{J}$ cinsinden ifade edilen Denk.(1.22)'deki $\vec{A}$'nın biçimi ile karşılaştırılması halinde, mıknatıslanma vektörünün etkisinin hem

$$\vec{J}_m = \nabla \times \vec{M} \quad (\text{A/m}^2) \qquad (1.62)$$

kadarlık bir **hacimsel akım yoğunluğuna** ve hem de

$$\vec{J}_{ms} = \vec{M} \times \hat{n} \qquad (1.63)$$

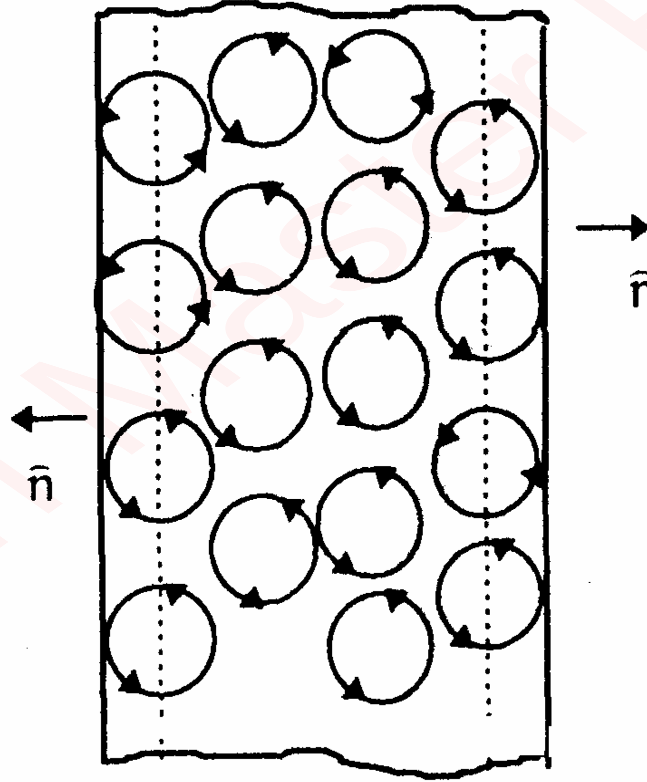
kadarlık bir **yüzeysel akım yoğunluğuna eşdeğer olduğu görülür**. Denk.(1.62) ve (1.63)'de basitlik için, ∇ ve $\hat{\boldsymbol{n}}$'nın üzerindeki üsler atılmıştır, çünkü her ikisi de, M mıknatıslanma vektörünün mevcut olduğu kaynak noktasının koordinatlarını belirtir. Bununla beraber, kaynak ve alan noktalarına ait koordinatların birbirine karışma ihtimali olduğu zaman, üsler kullanılmalıdır.

Verilen bir $\vec{\boldsymbol{M}}$ hacimsel manyetik dipol momenti yoğunluğu tarafından oluşturulan $\vec{\boldsymbol{B}}$ manyetik akı yoğunluğunun bulunması problemi, bu durumda, Denk.(1.62) ve (1.63)'den $\vec{\boldsymbol{J}}_m$ ve $\vec{\boldsymbol{J}}_{ms}$ eşdeğer mıknatıslanma akım yoğunluklarının bulunması; Denk.(1.61)'den $\vec{\boldsymbol{A}}$'nın tayin edilmesi ve sonra $\vec{\boldsymbol{A}}$'nın rotasyonelinden $\vec{\boldsymbol{B}}$'nin bulunmasına indirgenir. Eğer varsa, dışardan uygulanan manyetik alan da ayrıca hesaba katılmalıdır.

Denk.(1.62) ile (1.63)'ün matematiksel olarak türetilmesi kolaydır. Bir hacimsel manyetik dipol moment yoğunluğunun, hacimsel akım yoğunluğu ve bir yüzeysel akım yoğunluğuna eşdeğerliliği, Şekil.1.9'a bakılarak niteliksel olarak

değerlendirilebilir. Bu şekilde, mıknatıslanmış bir malzeme kesiti gösterilmiştir. Dışardan uygulanan bir manyetik alanın, atomik dolanım akımlarının alana göre bir düzene girmesine ve böylelikle malzemenin mıknatıslanmasına sebep olduğu kabul edilir.

$\odot$ $\vec{M}$, sayfadan dışa doğru



Şekil.1.9: Bir manyetize maddenin kesiti

Bu mıknatıslanma etkisinin şiddeti, $\vec{M}$ mıknatıslanma vektörü ile ölçülür. Malzemenin yüzeyi üzerinde bir $\vec{J}_{ms}$ yüzeysel akım yoğunluğu olacaktır; bunun yönü $\vec{M} \times \hat{n}$ çapraz çarpımı ile tam olarak verilir. Eğer M malzeme içinde düzgün (üniform) ise, zıt yönlerde akan komşu atomik dipol akımları her yerde yok olacak ve içerde hiçbir net akım kalmayacaktır. Bu sonuç Denk.(1.62)'den görülebilir çünkü, sabit bir $\vec{M}$'nin uzayın koordinatlarına göre türevleri (ve bu yüzden rotasyoneli) sıfırdır. Bununla beraber, eğer $\vec{M}$, uzayın koordinatları ile değişiyorsa, dahili atomik akımlar tam olarak yok olmayacak ve net bir $\vec{J}_m$ hacimsel akım yoğunluğu meydana getirecektir.

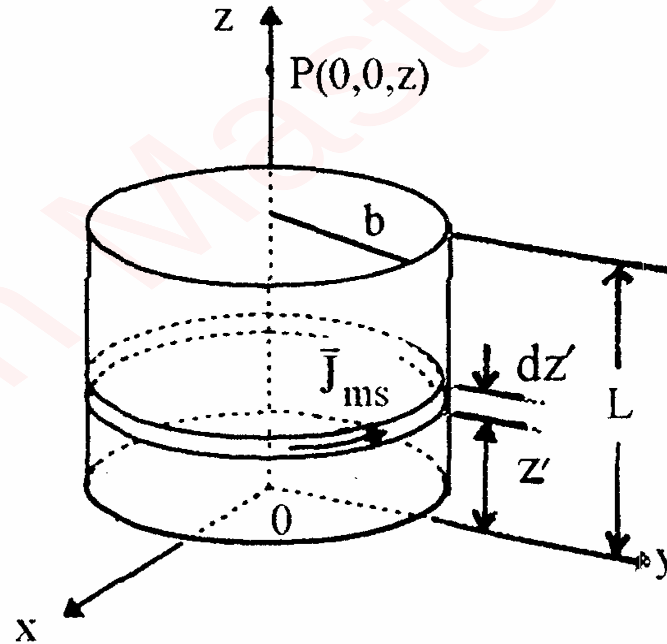
****

Örnek 1.8: Manyetik bir malzemenin düzgün olarak mıknatıslanmış silindirik bir parçasının ekseni üzerindeki bir noktada manyetik akı yoğunluğunu bulunuz. Silindirin yarıçapı b, uzunluğu L ve eksenel mıknatıslanma $\vec{M}$'dir.

Çözüm:

Silindirik bir çubuk mıknatısla ilgili bu problemde, Şekil.1.10' da gösterildiği gibi, mıknatıslanmış silindirin ekseni silindirik koordinat sisteminin z ekseni ile çakışsın. M mıknatıslanması silindir içinde sabit olduğundan, $\vec{J}_m = \nabla' \times \vec{M} = \mathbf{0}$ dır ve hiçbir eşdeğer hacimsel akım yoğunluğu yoktur, mıknatıslanma yüzeysel akım yoğunluğu, yan duvar üzerinde,

$$\vec{J}_{ms} = \vec{M} \times \hat{n}' = (\hat{z}m) \times \hat{r} = \hat{\phi}M \qquad (1.64)$$



Şekil.1.10: Düzgün olarak manyetize olmuş dairesel silindir

olur. Bu durumda mıknatıs M (A/m)'lik bir çizgisel akım yoğunluğuna sahip silindirik bir kabuğa benzer. Üst ve alt yüzeyler üzerinde hiçbir yüzey akımı yoktur. P(0,0,z)'deki $\vec{B}$'yi bulmak için, bir $\hat{\phi}Mdz'$ akımı taşıyan diferansiyel bir dz' uzunluğu gözönüne alınır ve Denk.(1.38)'i kullanılarak,

$$d\vec{B} = \hat{z}\frac{\mu_0 mb^2 dz'}{2\left[(z-z')^2 + b^2\right]^{3/2}}$$

ve

$$\vec{B} = \int d\vec{B} = \hat{z}\int_0^L \frac{\mu_0 Mb^2 dz'}{2\left[(z-z')^2 + b^2\right]^{3/2}} = \hat{z}\frac{\mu_0 M}{2}\left[\frac{z}{\sqrt{z^2+b^2}} - \frac{z-L}{\sqrt{(z-L)^2+b^2}}\right] \quad (1.65)$$

elde edilir.

****

1.7. MANYETİK ALAN ŞİDDETİ VE BAĞIL PERMABİLİTE

Bir dış manyetik alanın uygulanması, hem dahili dipol momentlerin hizaya sokulmasına ve hem de manyetik malzeme içinde indüklenmiş bir manyetik momente neden olduğundan, bir manyetik malzemenin varlığı halinde, alan değerinin serbest uzaydaki değerinden farklı olmasını bekleriz. Mıknatıslanmanın makroskobik etkisini, Denk.(1.7) ile verile $\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J}$ şeklindeki temel rotasyon denklemine Denk.(1.62)'deki $\vec{J}_m$ eşdeğer hacimsel akım yoğunluğu sokularak incelenebilir. Bu durumda,

$$\frac{1}{\mu_0} = \nabla \times \vec{B} = \vec{J} + \vec{J}_m = \vec{J} + \left(\nabla \times \vec{M}\right)$$

veya

$$\nabla \times \left(\frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M}\right) = \vec{J} \qquad (1.66)$$

elde edilir. Şimdi, yeni bir temel alan niceliği tanımlarız: **Manyetik alan şiddeti H**. Tanım bağıntısı:

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M} \quad \text{(A/m)} \qquad (1.67)$$

şeklindedir. $\vec{H}$ **vektörünün kullanılması, herhangi bir ortamdaki manyetik alanla serbest akım dağılımını birbirine bağlayan bir rotasyon denkleminin yazılmasını sağlar.** Mıknatıslanma vektörü $\vec{M}$ veya eşdeğer hacimsel akım yoğunluğu $\vec{J}_m$ ile açık olarak ilgilenmeye hiç gerek yoktur. Denk.(1.66) ile (1.67)'yi birleştirilerek,

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J} \qquad (1.68)$$

şeklinde yeni bir denklem elde edilir. Burada $\vec{J}$ (A/m^2), hacimsel serbest akım yoğunluğudur. $\nabla \cdot \vec{B} = 0$ denklemi ile birlikte bu denklem, herhangi bir ortamdaki manyetostatik için iki temel diferansiyel denklemdir. Serbest uzayın permiabilitesi μ_0 , bu iki denklemde açık olarak gözükmez.

Denk.(1.68)'in integral biçimi, her iki tarafın skaler yüzey integrali alınarak,

$$\iint_S \left(\nabla \times \vec{H}\right) \cdot d\vec{s} = \iint_S \vec{J} \cdot d\vec{s} \qquad (1.69)$$

veya Stokes teoremine uygun olarak,

$$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{l} = I \quad \text{(A)} \qquad (1.70)$$

bulunur. Burada C, S yüzeyini çevreleyen kapalı yol ve I akımı, S'den geçen toplam akımdır. **C ve I'nin birbirlerine göre yönleri sağ-el kuralına uyar**. **Denk.(1.70), Ampere devre kanununun diğer bir şeklidir**. Bu kanun, manyetik alan şiddetinin herhangi bir kapalı yol etrafındaki dolananının, yol tarafından sınırlanan yüzeyden akan serbest akıma eşit olduğunu ifade eder. Kesim.1.2'de belirtildiği gibi, **Ampere devre kanunu, silindirik simetri bulunduğu zaman yani, akımın etrafında, üzerinde manyetik alanın sabit olduğu kapalı bir yol bulunduğu zaman, bir akım tarafından oluşturulan manyetik alanı bulmada en kullanışlı yoldur.**

Ortamın manyetik özellikleri lineer ve izotropik olduğu zaman, mıknatıslanma, manyetik alan şiddeti ile doğru orantılı olur:

$$\vec{M} = \chi_m \vec{H} \tag{1.71}$$

Burada χ_m, manyetik suseptibilite (alınganlık) olarak adlandırılan boyutsuz bir niceliktir. Denk.(1.71), Denk.(1.67)'de kullanılırsa;

$$\begin{aligned} \vec{B} &= \mu_0 (1 + \chi_m) \vec{H} \\ &= \mu_0 \mu_r \vec{H} = \mu \vec{H} \end{aligned} \tag{1.72a}$$

veya

$$\vec{H} = \frac{1}{\mu} \vec{B} \text{ (A/m)} \tag{1.72b}$$

elde edilir. Burada,

$$\mu_r = 1 + \chi_m = \frac{\mu}{\mu_0} \tag{1.73}$$

ortamın bağıl (rölatif) permiabilitesi olarak bilinen bir diğer boyutsuz niceliktir. $\mu = \mu_0\mu_r$ **parametresi, ortamın mutlak permiabilitesi (veya bazen sadece permiabilite) dir ve (H/m) cinsinden ölçülür**; χ_m ve bu yüzden μ_r uzay koordinatlarının bir fonksiyonu olabilir. **Basit (lineer, izotropik ve homojen) bir ortam için χ_m ile μ_r sabittir.**

Çoğu maddelerin permiabilitesi serbest uzayınkine çok yakındır. Demir, nikel ve kobalt gibi ferromanyetik maddeler için μ_r çok büyük olabilir (50-5000 ve özel alaşımlar için bu değer 10^6 ve daha yukarı çıkabilir); permiabilite sadece $\vec{H}$'in büyüklüğüne değil, maddenin geçmişine de bağlıdır.

****

Örnek 1.9: μ permiabiliteli ferromanyetik bir maddeden yapılmış toroid biçimli bir çekirdeğin etrafına N sarım sarıldığını varsayalım. Ortalama yarıçapı r olan çekirdek, a (a<<r) yarıçaplı dairesel bir kesite ve Şekil.1.11'deki gibi l_g

uzunluğunda dar bir hava aralığına sahiptir. Sarımlardan I_0 doğru akımı akmaktadır.

(a) Ferromanyetik çekirdek içindeki $\vec{B}_f$ manyetik akı yoğunluğunu bulunuz.

(b) Çekirdek içindeki $\vec{H}_f$ manyetik alan şiddetini bulunuz.

(c) Hava aralığındaki $\vec{H}_g$ manyetik alan şiddetini bulunuz.

Çözüm:

a) Denk.(1.70) Ampere devre kanununu, ortalama r_0 yarıçaplı dairesel C kapalı yolu etrafında uygulanarak,

$$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{l} = NI_0 \qquad (1.74)$$

yazılır. Eğer akı kaçağı ihmal edilirse, aynı toplam akı hem ferromanyetik çekirdekten hem de hava aralığından akacaktır. Eğer akının hava aralığındaki saçılması ihmal edilirse, hem çekirdek ve hem de hava aralığındaki $\vec{B}$ manyetik akı

yoğunluğu aynı olacaktır. Bununla beraber, farklı permiabilitelere sahip olmaları yüzünden, her iki kısımdaki manyetik alan şiddetleri farklı olacaktır. Böylece,

$$\vec{B}_f = \vec{B}_g = \hat{\phi} B_f \qquad (1.75)$$

yazılır. Ferromanyetik çekirdekte,

$$\vec{H}_f = \hat{\phi} \frac{B_f}{\mu} \qquad (1.76)$$

ve hava aralığında,

$$\vec{H}_g = \hat{\phi} \frac{B_f}{\mu_0} \qquad (1.77)$$

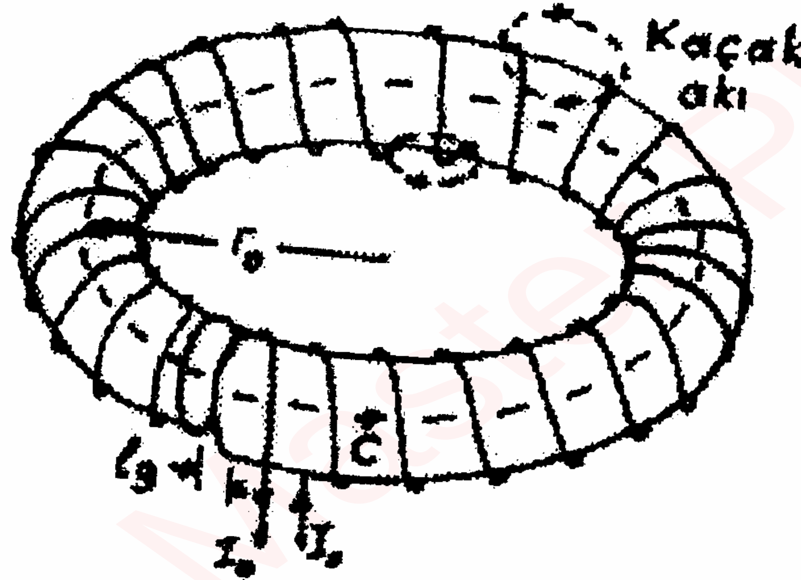
olur. Denk.(1.75), (1.76) ve (1.77) ile verilen ifadeler Denk.(1.74)'de kullanılarak,

$$\frac{B_f}{\mu}\left(2\pi r_0 - l_g\right) + \frac{B_f}{\mu_0} l_g = N I_0$$

ve

$$\vec{B}_f = \hat{\phi}\frac{\mu_0 \mu N I_0}{\mu_0\left(2\pi r_0 - l_g\right) + \mu l_g} \tag{1.78}$$

elde edilir.



Şekil.1.11: Hava aralıklı ferromanyetik toroid üzerine sarılmış bobin

b) Denk.(1.76) ve (1.78)'den,

$$\vec{H}_f = \hat{\phi}\frac{\mu_0 N I_0}{\mu_0\left(2\pi r_0 - l_g\right) + \mu l_g} \tag{1.79}$$

bulunur.

c) Benzer şekilde, Denk.(1.77) ve (1.78)'den,

$$\vec{H}_g = \hat{\phi}\frac{\mu N I_0}{\mu_0\left(2\pi r_0 - l_g\right) + \mu l_g} \qquad (1.80)$$

elde edilir.

$H_g / H_f = \mu / \mu_0$ olduğundan, hava aralığındaki manyetik alan şiddeti, ferromanyetik çekirdektekinden çok daha kuvvetlidir.

Soru: Sizce neden bu problemde $a \ll r_0$ şartı koyulmuştur?

****

1.8. MANYETİK DEVRELER

Örnek.1.9'daki problem aslında, sarımlardan seri haldeki ferromanyetik çekirdek ve hava aralığından bir manyetik akı akmasına neden olan akım taşıyan manyetik devredir. Manyetik alan şiddetinin kapalı bir yol etrafındaki

$$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{l}$$

çizgi integrali **manyetomotor kuvvet (mmk)** olarak tanımlanır. Birimi ampere (A)'dir. Ancak, $\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{l} = NI_0$ ifadesi yüzünden çoğunlukla amper-sarım olarak belirtilir. **mmk, newton olarak ölçülen bir kuvvet değildir**.

$V_m = NI_0$, bir manyetik devrede Φ manyetik akısının akmasına neden olan manyetomotor kuvvetini göstersin. Eğer çekirdek kesitinin yarıçapı, toroidin ortalama yarıçapından çok daha küçükse, çekirdek içindeki B manyetik akı yoğunluğu yaklaşık olarak sabit olur ve

$$\Phi \cong BS \qquad (1.81)$$

yazılır. Burada S, çekirdeğin kesit alanıdır. Denk.(1.81) ile (1.78)'in birleştirilmesi halinde

$$\Phi = \frac{NI_0}{(2\pi r_0 - l_g)/\mu S + l_g/\mu_0 S} \qquad (1.82)$$

elde edilir. Denk.(1.82),

$$\Phi = \frac{V_m}{R_f + R_g} \qquad (1.83)$$

şeklinde yeniden yazılabilir. Burada,

$$R_f = \frac{2\pi r_0 - l_g}{\mu S} = \frac{l_f}{\mu S} \qquad (1.84)$$

ve $l_f = 2\pi r_0 - l_g$ ferromanyetik çekirdeğin uzunluğudur. Benzer şekilde,

$$R_g = \frac{l_g}{\mu_0 S} \qquad (1.85)$$

dir. Hem $\mathcal{R}_f$ hem de $\mathcal{R}_g$, düzgün S kesitli, homojen malzemenin düz bir parçasının DC direnci için elde edilen

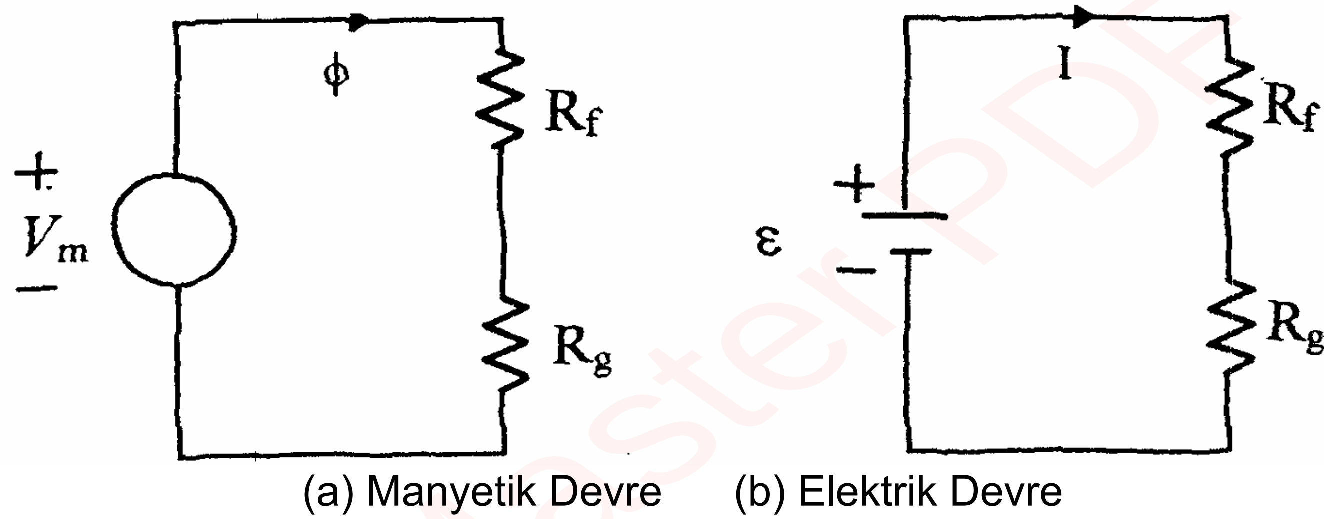
$$R = \frac{l}{\sigma S} \quad (\Omega)$$

formülü ile aynı biçime sahiptir ve **reluktans** olarak adlandırılır.

$\mathcal{R}_f$ ferromanyetik çekirdeğin relüktansı, $\mathcal{R}_g$ hava aralığının relüktansıdır. **Relüktansın SI birimi Henry'nin tersi (H^{-1})**'dir. Çekirdeğin düz olmamasına rağmen, Denk.(1.84) ve (1.85)'in yukarıdaki şekilde elde edilmelerinin nedeni, $\vec{B}$'nin çekirdek kesiti üzerinde sabit kabul edilmesidir. Denk.(1.83), ε emk'lık ideal bir gerilim kaynağının, seri bağlı $\mathcal{R}_f$ ve $\mathcal{R}_g$ dirençlerine bağlandığı bir elektrik devresindeki I akımı için yazılan,

$$I = \frac{\varepsilon}{\mathcal{R}_f + \mathcal{R}_g} \qquad (1.86)$$

ifadesine benzer. Manyetik ve elektrik devrelerindeki benzerlik Şekil.1.12a ve b'de gösterilmiştir.



(a) Manyetik Devre (b) Elektrik Devre

Şekil.1.12: Şekil.1.11'deki Toroid bobin için eşdeğer manyetik devre ve elektrik devresi

Benzerlikten faydalanarak, elektrik devrelerinin analizde kullanılan tekniklerle manyetik devreler analiz edilebilir. Benzer nicelikler şunlardır:

Manyetik Devreler	Elektrik Devreleri
mmk, $V_m (= NI)$	emk, ε
manyetik akı, Φ	elektrik akımı, I
relüktans, R	direnç, R
permiabilite, μ	iletkenlik,σ

Bu uygun benzerliklere rağmen, manyetik devrelerin tam bir analizini yapmak çok zordur.

Birincisi, sızıntı akılarını hesaba katmak çok güçtür. Akılar, bir manyetik devrenin ana akı yollarından saparlar veya sızarlar. Şekil.1.11'deki toroidal çekirdek için, sızıntı akı yolları her sarımı kuşatır, gösterildiği gibi bunlar çekirdeğin etrafındaki ortamdan geçerler çünkü, havanın permiabilitesi sıfır değildir. (Doğru akım taşıyan elektrik devrelerinin iletim yolları dışındaki sızıntı akımları ihmal edilebilir. Bunun

sebebi, iyi bir iletkenle karşılaştırıldığında, havanın iletkenliğinin pratik olarak sıfır olmasıdır.)

İkinci güçlük, manyetik akı çizgilerinin hava aralığında dağılmasına neden olan kenar etkileridir.

NOT: Örnek.1.9'daki hava aralığının "dar" olarak alınmasının amacı, bu kenar etkilerini en aza indirmekti. Daha doğru nümerik sonuç elde etmek için, hava aralığının etkin alanını, ferromanyetik çekirdeğin kesit alanından bir az büyük olarak göz önüne almak, genellikle kullanılan bir yöntemdir. Denk.(1.75)'de bunun gibi bir düzeltme yapılırsa, B_g,

$$B_g = \frac{a^2 B_f}{(a + l_g)^2} < B_f$$

olur. (Çekirdek kesitinin lineer boyutlarının her biri hava aralığının uzunluğu kadar artırılır.)

Üçüncü bir güçlük, ferromanyetik malzemenin permiabilitesinin manyetik alan şiddetine bağlı olmasıdır; yani, **B ile H lineer olmayan bir ilişkiye sahiptirler (ve hatta aynı yönde de olmayabilirler)**. Örnek.1.9'daki problem, B_C veya H_C bilinmeden μ için bir değer kullanıldığı için gerçekçi değildir.

Pratik bir problemde, daha ileride Şekil.1.15'de gösterileceği gibi, ferromanyetik malzemenin B-H eğrisi verilmelidir. Böyle durumlarda B'nin H'ye oranı bir sabit değildir ve B_f, sadece H_f bilindiği zaman belirlenebilir. Bu durumda problem nasıl çözülecektir? İki şart sağlanmalıdır. **Birincisi, $H_g l_g$ ile $H_f l_f$ toplamı, toplam mmk NI_0'a eşit**, yani,

$$H_g l_g + H_f l_f = NI_0 \qquad (1.87a)$$

olmalıdır. **İkincisi**, eğer hiçbir sızıntı akısının olmadığı kabul edilirse, ferromanyetik çekirdekteki ve hava aralığındaki toplam Φ akısı aynı veya $B_f = B_g$ olmalıdır. Bu yüzden,

$$B_f = \mu_0 H_g \qquad (1.87b)$$

Denk.(1.87b)’nin Denk.(1.87a)'da kullanılması, çekirdek içindeki B_f ile H_f'yi birbirine bağlayan bir denklem verir. Bu denklem

$$B_f + \mu_0 \frac{l_f}{l_g} H_f = \frac{\mu_0}{l_g} N I_0 \qquad (1.88)$$

dir. Bu ifade, B-H düzleminde $-\mu_0 l_f / l_g$ lik bir negatif eğime sahip bir doğru denklemidir. Bu çizgi ile B-H eğrisinin kesişmesi **çalışma noktasını** belirler. **Çalışma noktası belirlenince, μ, H ve diğer bütün nicelikler elde edilebilir**.

Denk.(1.83) ve (1.86) arasındaki benzerlikten faydalanarak, manyetik devreler için, elektrik devreleri için kullanılan Kirchhoff’un gerilim ve akım kanunlarına karşı gelen iki temel bağıntı yazılabilir. Bir manyetik devredeki herhangi bir kapalı yol için, Kirchhoff'un gerilim kanununa benzer bir ifade,

$$\sum_j \varepsilon_j = \sum_k R_k I_k \quad \text{(V)} \quad \text{K.G.K.}$$

veya

$$\sum_{j} N_j I_j = \sum_{k} \Phi_k R_k \qquad (1.89)$$

şeklinde yazılabilir. **Bu denklem, bir manyetik devrede kapalı bir yol etrafındaki amper-sarımların cebirsel toplamının, relüktans ve akıların çarpımlarının cebirsel toplamına eşit olduğunu gösterir.**

Bir elektrik devresindeki bir düğüm noktası için Kirchhoffun akım kanunu, $\nabla \cdot \vec{J} = \mathbf{0}$'in bir sonucudur. Benzer şekilde, Denk.(1.6)'daki $\nabla . \vec{B} = \mathbf{0}$ temel postülatından Denk.(1.8) elde edilir. Böylece,

$$\sum_{j} \Phi_j = \mathbf{0} \qquad (1.90)$$

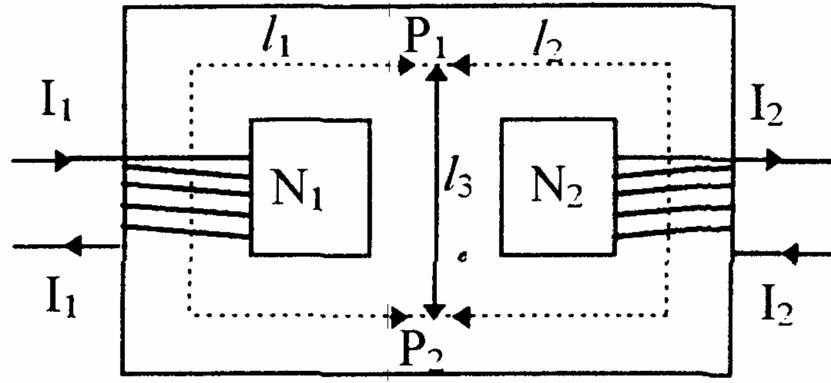
olur. **Bu ifade, manyetik bir devre içindeki bir düğümden dışa akan bütün manyetik akıların cebirsel toplamının sıfır olduğunu gösterir.** Denk.(1.89) ve (1.90), manyetik devrelerin sırasıyla ilmek ve düğüm analizine temel oluştururlar.

****

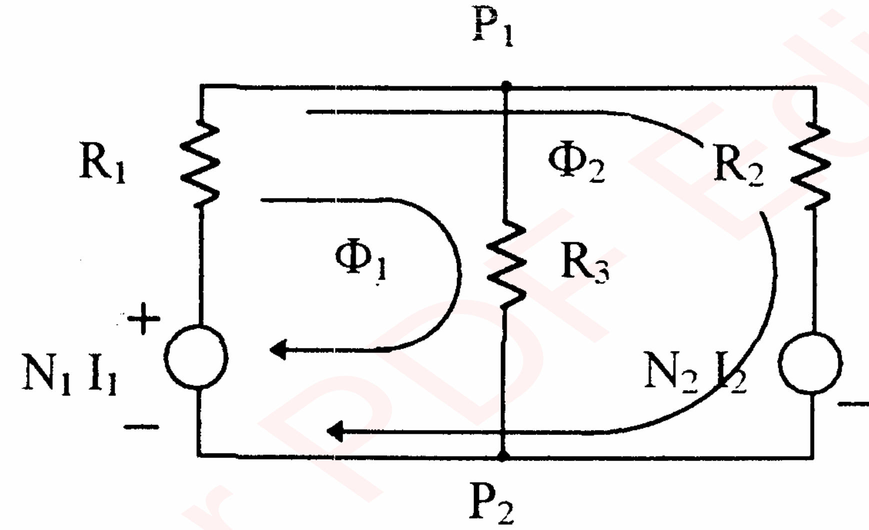
Örnek 1.10: Şekil.1.13a'daki manyetik devreyi gözönüne alınız. Ferromanyetik çekirdeğin yan kollarındaki N_1 ve N_2 sarımlarından sırasıyla I_1 ve I_2 kararlı akımları akmaktadır. Çekirdeğin kesit alanı S_C ve permiabilitesi μ'dür. Orta koldaki manyetik akıyı bulunuz.

Çözüm:

İlmek analizi için eşdeğer manyetik devre Şekil.1.13b'de gösterilmiştir. İki mmk kaynağı (N_1I_1 ve N_2I_2) sırasıyla $\mathbf{R_1}$ ve $\mathbf{R_2}$ relüktansları ile seri bağlı olarak uygun kutuplama ile gösterilmiştir. Bu, açıkça iki ilmekli bir devredir. P_1P_2 orta kolundaki manyetik akı tayin edileceğinden, orta koldan sadece bir ilmek akısı (Φ_1) akacak şekilde iki ilmek seçmek uygun olur. Relüktanslar, ortalama yol uzunlukları esas alınarak hesaplanır. Elbette bulunacak değerler yaklaşık ifadeler olacaktır. Böylece relüktanslar için,



(a) Akım taşıyan sarımlı manyetik çekirdek



(b) İlmek analizi için manyetik devre

Şekil.1.13: Bir manyetik devre

$$R_1 = \frac{l_1}{\mu S_C} \tag{1.91a}$$

$$R_2 = \frac{l_2}{\mu S_C} \tag{1.91b}$$

$$R_3 = \frac{l_3}{\mu S_C} \tag{1.91c}$$

yazılabilir. Denk.(1.89)'dan iki ilmek denklemi elde edilir. Bu denklemler

1. İlmek:

$$N_1 I_1 = (\mathbf{R}_1+\mathbf{R}_3)\Phi_1+\mathbf{R}_1\Phi_2 \tag{1.92}$$

2. İlmek:

$$N_1 I_1 - N_2 I_2 = \mathbf{R}_1\Phi_1+(\mathbf{R}_1+\mathbf{R}_2)\Phi_2 \tag{1.93}$$

şeklindedir. Bu iki denklem birlikte çözülerek,

$$\Phi_1 = \frac{R_2 N_1 I_1 - R_1 N_2 I_2}{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3} \tag{1.94}$$

Aslında, manyetik akılar ve bu yüzden üç koldaki manyetik akı yoğunlukları farklı olduklarından, Denk.(1.91a), (1.91b) ve (1.91c)' deki relüktansları hesaplamada, farklı permiabiliteler kullanılmalıydı. Ancak, permiabilitenin değeri ile manyetik akı yoğunluğu karşılıklı olarak birbirlerine bağlıdır, çözümün doğruluğunu artırmanın tek yolu, çekirdek malzemesinin B-H eğrisinin verilmesi şartıyla, bir ardışık yaklaşım işlemi kullanmaktır. Mesela, ilk önce, bir μ kabul ederek ve Denk.(1.91)'ler

kullanılarak relüktanslar hesaplandıktan sonra Φ_1, Φ_2 ve Φ_3 (ve böylece B_1, B_2 ve B_3) bulunur. B-H eğrisinden faydalanarak B_1, B_2 ve B_3'den, bunlara karşı gelen μ_1, μ_2 ve μ_3'ler bulunabilir. Bulunan bu yeni değerler relüktansların değerlerini değiştireceğinden, yeni relüktanslarla B_1, B_2 ve B_3 için yeni bir yaklaşım elde edilir. Yeni akı yoğunluklarından yeni permiabiliteler ve yeni relüktanslar belirlenir. Bu işleme, hesaplanan değerler arasında küçük farklar elde edene kadar devam edilir.

****

1.9. MANYETİK MALZEMELERİN DAVRANIŞI

Bölüm.1.7'deki Denk.(1.71) ile verilen $\vec{M} = \chi_m \vec{H}$ eşitliğinde, lineer izotropik bir ortamın makroskopik manyetik özelliği, M mıknatıslanması ile H manyetik alan şiddeti arasında boyutsuz bir orantı katsayısı olan χ_m manyetik alınganlığı (suseptibilite) tanımlanarak açıklandı. Bağıl permiabilite basitçe $\mu_r = 1 + \chi_m$ dir.

Manyetik malzemeler, μ_r değerlerine göre kabaca üç ana gruba ayrılabilir:

Diyamanyetik : μ_r<1 (χ_m çok küçük negatif bir sayı)

Paramanyetik : μ_r>1 (χ_m çok küçük pozitif bir sayı)

Ferromanyetik : μ_r>>1 (χ_m büyük pozitif bir sayı)

Daha önce bahsedildiği gibi, mikroskobik manyetik olayların tam olarak anlaşılması, kuantum mekaniği bilgisi gerektirir. Aşağıda, çeşitli tipteki manyetik malzemelerin davranışının nitelik olarak izahı, klasik atom modeline dayanarak verilecektir.

Diyamanyetik malzemede, herhangi bir atomdaki elektronların orbital ve spin hareketlerinden doğan net manyetik moment, dışarıdan uygulanan bir manyetik alan yoksa sıfırdır. Denk.(1.4) ile verilen $\vec{F}_m = q(\vec{u} \times \vec{B})$ denkleminde öngörüldüğü gibi, bu malzemeye harici manyetik alanın uygulanması, orbitaldeki elektronlar üzerinde bir kuvvet meydana getirir; bu kuvvet de elektronların açısal hızlarında değişimlere yol açar. Sonuç olarak, net bir manyetik moment oluşturulur. **Bu bir mıknatıslık indükleme işlemidir**. Elektromanyetik indüksiyonun Lenz kanununa göre, **indüklenen manyetik moment daima uygulanan alana zıttır; bu yüzden manyetik akı yoğunluğunu azaltır. Bu işlemin makroskopik etkisi, negatif bir alınganlıkla tanımlanabilen negatif bir mıknatıslanmaya eşdeğerdir**. Bu etki genellikle çok küçüktür ve en çok bilinen diyamanyetik malzemeler (bizmut, bakır, kurşun, civa, germanyum, gümüş, altın, elmas) için $\chi_{m'}$ -10^{-5} mertebesindedir.

Diyamanyetizma, esas olarak, **bir atomdaki elektronların orbital hareketlerinden ortaya çıkar ve her malzemede bulunan bir özelliktir**. Çoğu

malzemelerde, herhangi bir pratik önemi yoktur. Diyamanyetik etki, paramanyetik ve ferromanyetik malzemelerde maskelenir. **Diyamanyetik malzemeler hiçbir sürekli mıknatıslanma göstermezler ve uygulanan harici alan kaldırıldığı zaman, indüklenen manyetik moment yok olur.**

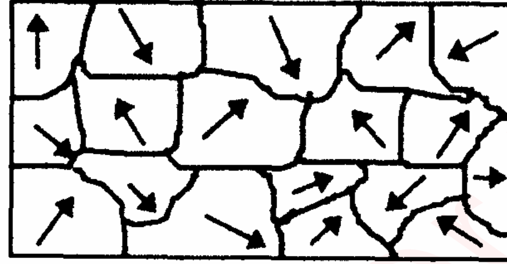
Bazı malzemelerde, elektronların yörünge ve spin hareketleri yüzünden oluşan manyetik momentler tamamen yok olmazlar ve atomlar ve moleküller net bir ortalama manyetik momente sahip olurlar. **Dışarıdan uygulanan bir manyetik alan, çok zayıf bir diyamanyetik etkiye ek olarak, moleküler manyetik momentleri, uygulanan manyetik alan yönüne çevirir ve bu yüzden manyetik akı şiddetini artırır.** Bu durumda, makroskopik etki, pozitif bir manyetik alınganlıkla tanımlanan pozitif bir mıknatıslanmaya eşdeğerdir. Bununla beraber, hizaya sokma işlemi, rastgele termal titreşim kuvvetleri tarafından engellenir. Küçük koherent etkileşim vardır ve manyetik akı yoğunluğundaki artış oldukça küçüktür. Böyle davranan malzemeler paramanyetik olarak adlandırılırlar. **Paramanyetik**

malzemeler genellikle çok küçük pozitif değerli manyetik alınganlığa sahiptirler (alüminyum, magnezyum, titanyum ve tugsten için 10^{-5} mertebesindedir).

Paramanyetizma, esasen elektronların spin hareketleri yüzünden oluşan manyetik dipol momentleri sebebiyle ortaya çıkar. Uygulanan alan tarafından, manyetik dipoller üzerine etkiyen yöneltici kuvvetler, termal düzen bozucu etkilerle tesirsiz hale getirilirler. Esas olarak sıcaklığa bağlı olmayan diyamanyetizmanın aksine, **paramanyetik etki sıcaklığa bağlıdır ve küçük termal çarpışmanın olduğu yerde yani düşük sıcaklıklarda daha kuvvetli hale gelir.**

Ferromanyetik malzemelerin mıknatıslanması, paramanyetik malzemelerinkinden çok daha büyük mertebelerde olabilir. Tablo.1.1'de bazı maddeler için bağıl permiabilite değerleri verilmiştir. Bu değerler, frekans ve sıcaklığa bağlıdır. Tablodaki değerler; oda sıcaklığında ortalama alçak frekanstaki değerleridir. **Ferromanyetizma**, **mıknatıslanmış bölgeler (domen)** vasıtasıyla açıklanabilir. Deneysel olarak doğrulanan bu modele göre, ferromanyetik bir malzeme, lineer

boyutları birkaç mikrondan birkaç milimetreye kadar uzanan çok sayıda küçük bölgeden oluşmuştur. Her biri yaklaşık 10^{15} veya 10^{16} atom ihtiva eden bu domenler, şu anlamda tamamen mıknatıslanmışlardır:



Şekil.1.14: Polikristal feromanyetik bir numunenin domen yapısı

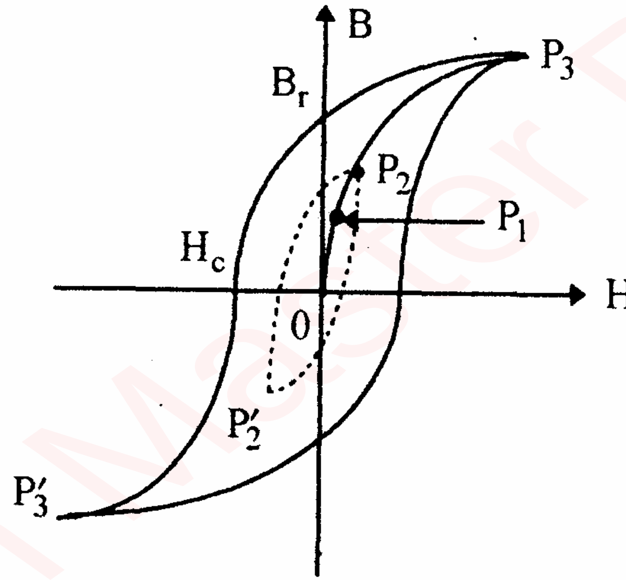
Uygulanan bir harici alanın yokluğunda bile, elektronların spin hareketlerinden doğan yönlenmiş manyetik dipoller içerirler. Kuantum teorisi, bir domendeki atomların manyetik dipol momentleri arasında, dipol momentlerini paralel halde tutan, kuvvetli etkileşim kuvvetleri olduğunu ifade eder. Komşu domenler arasında, **domen duvarı** olarak adlandırılan, yaklaşık 100 atom kalınlığında bir geçiş bölgesi vardır. Mıknatıslanmamış bir durumda, ferromanyetik bir malzemenin komşu

domenlerin manyetik momentleri, Şekil.1.14'deki polikristal numune ile örneklendiği gibi, farklı yönlere sahiptirler. Bir bütün olarak bakıldığında, çeşitli domenlerdeki yönelmelerin rasgele yapısı, hiçbir net mıknatıslanma vermez.

Tablo.1.1: Bağıl permiabiliteler

Ferromanyetik (nonlineeer)	Bağıl permabilite, μ_r
Nikel	250
Kobalt	600
Demir (saf)	4000
Mumetal	10000
Paramanyetik	
Alüminyum	1,000021
Magnezyum	1,000012
Paladyum	1,00082
Titanyum	1,000018
Diyamanyetik	
Bizmut	0,99983
Altın	0,99996
Gümüş	0,99998
Bakır	0,99999

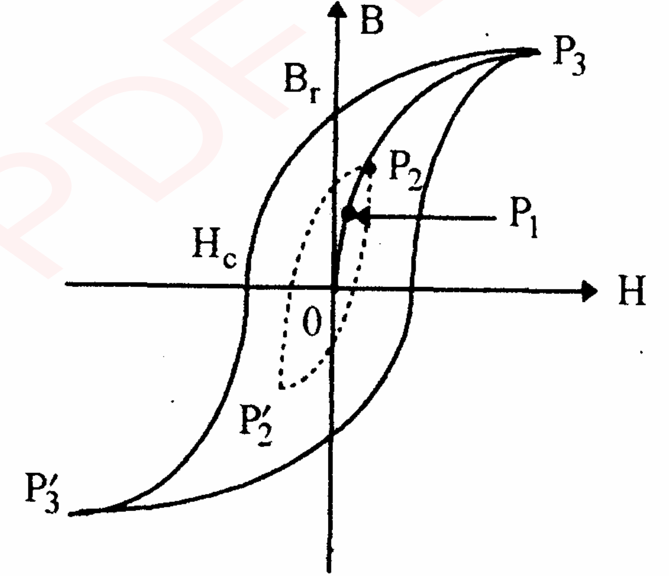
Ferromanyetik malzemeye dışarıdan bir manyetik alan uygulandığı zaman, uygulanan alanla aynı yönde manyetik momentlere sahip domenlerin duvarları, bu domenlerin büyüklüğü, diğer domenlerin zararına artacak şekilde hareket eder. Sonuçta, manyetik akı yoğunluğu artar.



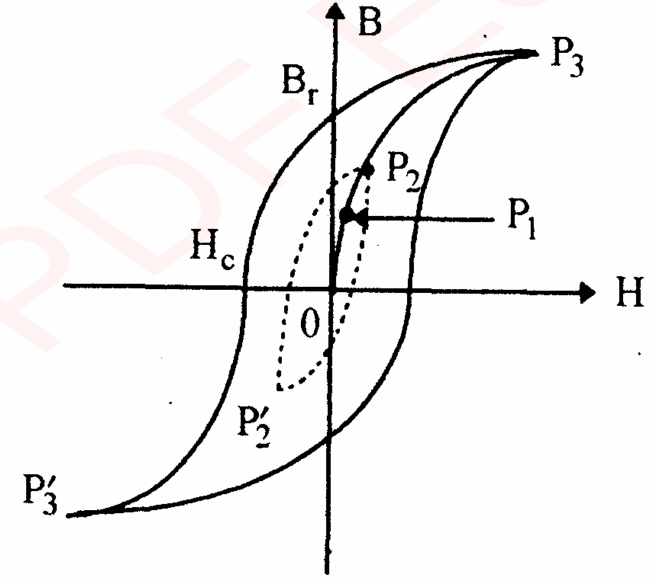
Şekil.1.15: Ferromanyetik malzeme için B-H düzlemindeki histerezis ilmeği

Uygulanan zayıf alanlar için, örneğin, Şekil.1.15'deki P_1 noktasına kadar olan durum için, domen duvarı hareketi tersine çevrilebilir (**tersinir**). **Fakat uygulanan alan daha kuvvetli olursa** (örneğin, P_1 noktasının geçildiği durumda), **domen**

duvarı hareketleri artık tersinir değildir ve buna ilaveten, uygulanan alanın yönüne doğru domen dönmesi de meydana gelir. Örneğin, eğer P_2 noktasına ulaşıldıktan sonra, **uygulanan alan sıfıra indirilirse**, B-H ilişkisi P_2P_1O sürekli çizgisini izlemeyecektir; bunun yerine, şekildeki kesik çizgili yolu izleyerek P_2'den P_2''ne düşecektir. Mıknatıslanmanın, kendini meydana getiren alanın gerisinde kalmasını gösteren bu olay, **histerezis** olarak adlandırılır. Uygulanan alan daha fazla artırılırsa (P_2'den P_3'e geçilirse), domen duvarı hareketi ve domen dönmesi, mikroskobik manyetik momentlerin uygulanan manyetik alanla, esaslı şekilde tam olarak bir hizaya gelmesine yol açacaktır. Bu noktada, manyetik malzemenin doyuma (satürasyon) ulaştığı söylenir. **B-H düzlemindeki $OP_1P_2P_3$ eğrisi, normal mıknatıslanma eğrisi** olarak adlandırılır.



Eğer uygulanan manyetik alan, P_3'deki değerinden sıfıra indirilirse, manyetik akı yoğunluğu sıfıra gitmez ve B_r değerinde kalır. Bu değer **artık (remenant) akı yoğunluğu** (Wb/m^2) adını alır ve uygulanan maksimum alan şiddetine bağlıdır. **Ferromanyetik bir malzemede artık akı yoğunluğunun varlığı, sürekli mıknatısları mümkün kılar.**



Bir numunenin manyetik akı yoğunluğunu sıfır yapmak için, zıt yönlü bir H_C manyetik alanı uygulamak gerekir. Gerekli olan bu $H_{C'}$ **giderici (koersif) kuvvet** olarak adlandırılır ancak, **giderici alan şiddeti** (A/m) daha uygun bir isimdir. H_C de B_r gibi, uygulanan manyetik alan şiddetinin maksimum değerine bağlıdır.

Şekil.1.15'den, **ferromanyetik malzeme için B-H ilişkisinin lineer olmadığı açıktır**. Bu yüzden, Denk.(1.72a) da olduğu gibi, $\vec{B} = \mu\vec{H}$ yazılırsa, μ'nün kendisi

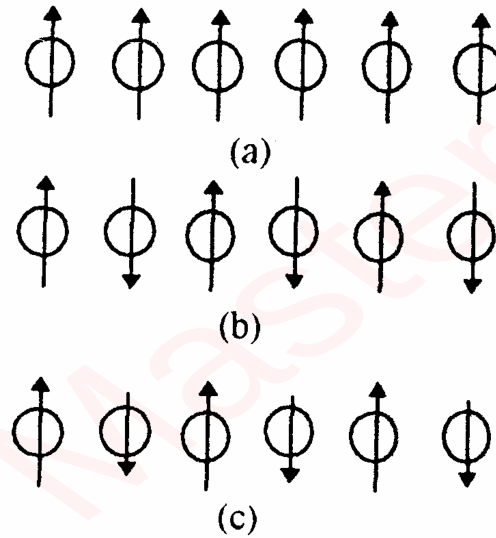
$\vec{H}$'ın büyüklüğünün bir fonksiyonudur. μ permiabilitesi, malzemenin mıknatıslanma geçmişine de bağlıdır. Çünkü aynı H için bile, μ'nün değerini tam olarak belirlemek için, özel bir histerezis ilmeğinin özel bir kolu üzerindeki çalışma noktasının yerinin bilinmesi gerekir.

Elektrik jeneratörlerinde, motorlar ve transformatörlerde kullanılan ferromanyetik malzemelerin, uygulanan çok küçük bir alan için büyük bir mıknatıslanmaya sahip olması istenir. Bu yüzden bunlar, uzun ve dar histerezis ilmeklerine sahip olmalıdırlar. Uygulanan manyetik alan şiddeti, $\pm H_{max}$ arasında periyodik olarak değişirken, histerezis ilmeği her devirde bir kez taranır. **Histerezis ilmeğinin alanı, birim hacim için devir başına enerji kaybına (histerezis kaybı) eşdeğerdir**. **Histerezis kaybı, domen duvarı hareketi ve domen dönmesi sırasında karşılaşılan sürtünmeyi yenmek için harcanan ve ısı şeklinde kaybolan enerjidir.** **Küçük ilmek alanlı, uzun ve dar histerezis ilmeklerine sahip olan ferromanyetik malzemeler "yumuşak" malzemeler**

olarak adlandırılırlar. Bu malzemelerde domen duvarları kolayca hareket ettirilebilirler. Diğer taraftan, iyi sürekli mıknatıslar, mıknatıslığın giderilmesine karşı yüksek bir direnç göstermelidirler. Bu durum, bu malzemelerin, büyük giderici H_C alan şiddetlerine, bu yüzden de geniş histerezis ilmeklerine sahip malzemelerden yapılmasını gerektirir. **Bu tür malzemeler, "sert" ferromanyetik malzemeler olarak adlandırılırlar**. Sert ferromanyetik malzemelerin giderici alan şiddetleri 10^5 (A/m) veya daha fazla olabilir; halbuki yumuşak malzemelerinki genellikle 50 (A/m) veya daha azdır.

Daha önce belirtildiği gibi, **ferromanyetizma, bir domendeki atomların manyetik dipol momentleri arasındaki kuvvetli etkileşimin sonucudur.** Şekil.1.16a, ferromanyetik bir malzemenin atomik spin yapısını temsil etmektedir. Bir ferromanyetik malzemenin sıcaklığı, termal enerji, etkileşim enerjisini aşacak bir dereceye yükseldiği zaman, mıknatıslanmış domenlerin düzeni bozulur. **Curie sıcaklığı** olarak bilinen **bu kritik sıcaklığın yukarısında, ferromanyetik bir**

malzeme paramanyetik bir madde gibi davranır. Bu yüzden, **bir sürekli mıknatıs kendi Curie sıcaklığının üzerinde ısıtıldığı zaman, mıknatıslığını kaybeder**. Çoğu ferromanyetik malzemelerin Curie sıcaklığı birkaç 100˚C ile 1000˚C arasında bulunmaktadır (Örneğin demirinki 770˚C dir).



Şekil.1.16: (a) Ferromanyetik, (b) antiferromanyetik ve (c) ferrimanyetik malzemeler için şematik atomik spin yapıları

Atom sayısı bakımından ferromanyetik elementlere yakın ve periyodik tabloda demirin komşuları olan krom ve manganez gibi bazı elementler de, atomik manyetik

dipol momentleri arasında kuvvetli etkileşimlere sahiptirler. Ancak, bunların etkileşim kuvvetleri, Şekil.1.16b'de gösterildiği gibi, elektron spinlerinin anti paralel yönelmelerine sebep olurlar. Bu spinlerin yönü atomdan atoma değişir ve sonuç, hiçbir net manyetik momentin olmamasıdır. Bu özelliğe sahip bir malzeme, **antiferromanyetik** olarak adlandırılır. Antiferromanyetizma, sıcaklığa da bağlıdır. Antiferromanyetik bir malzeme kendi Curie sıcaklığının üzerinde ısıtıldığı zaman, spin yönleri aniden rasgele hale gelir ve malzeme paramanyetik olur.

Ferromanyetizma ile antiferromanyetizma arasında bir davranış gösteren başka bir manyetik malzeme sınıfı vardır. Bu tür malzemelerde kuantum mekaniksel etkiler, Şekil.1.16c'de gösterildiği gibi, düzenli spin yapısındaki manyetik momentlerin yönlerini değiştirir ve büyüklüklerini farklı yapar; bu da, sıfırdan farklı net bir manyetik moment verir. Bu tür malzemeler **ferrimanyetik** olarak adlandırılırlar. Kısmi yoketmeden dolayı, ferrimanyetik bir maddede ulaşılan maksimum manyetik

akı yoğunluğu, bir ferromanyetik bir numuneninkinden önemli miktarda daha düşüktür.

1.10. MANYETİK ALANLAR İÇİN SINIR ŞARTLARI

Fiziksel özellikleri farklı olan ortamlara sahip olan bölgelerdeki manyetik alan problemlerini çözmek için, farklı ortamların sınır yüzeylerinde $\vec{B}$ ve $\vec{H}$ vektörlerinin sağlaması gereken şartları (sınır şartları) incelemek gerekir. Elektrostatik alanlar için sınır şartlarını elde etmek için kullanılan tekniklere benzer teknikler kullanılarak, $\nabla \cdot \vec{B} = 0$ ve $\nabla \times \vec{H} = \vec{J}$ temel denklemleri, sırasıyla, sınır yüzeyini içine alan küçük bir kutuya ve küçük bir kapalı yola uygulanarak, manyetostatiğe ait sınır şartları elde edilir. $\vec{B}$ alanı diverjanssız ($\nabla \cdot \vec{B} = 0$) olduğundan, **$\vec{B}$'nin normal bileşeninin arayüzeyi geçerken sürekli olduğu** sonucuna varılabilir; yani,

$$B_{1n} = B_{2n} \quad \text{(T)} \tag{1.95}$$

yazılır. Lineer ortamlar için, $\vec{B}_1 = \mu_1 \vec{H}_1$ ve $\vec{B}_2 = \mu_2 \vec{H}_2$ olduğundan,

$$\mu_1 H_{1n} = \mu_2 H_{2n} \tag{1.96}$$

yazılabilir.

Manyetostatik alanın teğetsel bileşenleri için sınır şartları, aşağıda tekrar verilen Denk.(1.70)'deki $\vec{H}$'ın rotasyonu denkleminin integral biçiminden elde edilir:

$$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{l} = I \qquad (1.97)$$

Şekil.1.17'deki abcda kapalı yolunu şimdi C çevresi olarak seçilebilir. Denk.(1.97) kullanılarak ve bc=da=Δh'ı sıfıra yaklaştırılarak,

$$\oint_{abcda} \vec{H} \cdot d\vec{l} = \vec{H}_1 \Delta\vec{w} + \vec{H}_2(-\Delta\vec{w}) = J_{sn} \cdot \Delta w$$

veya

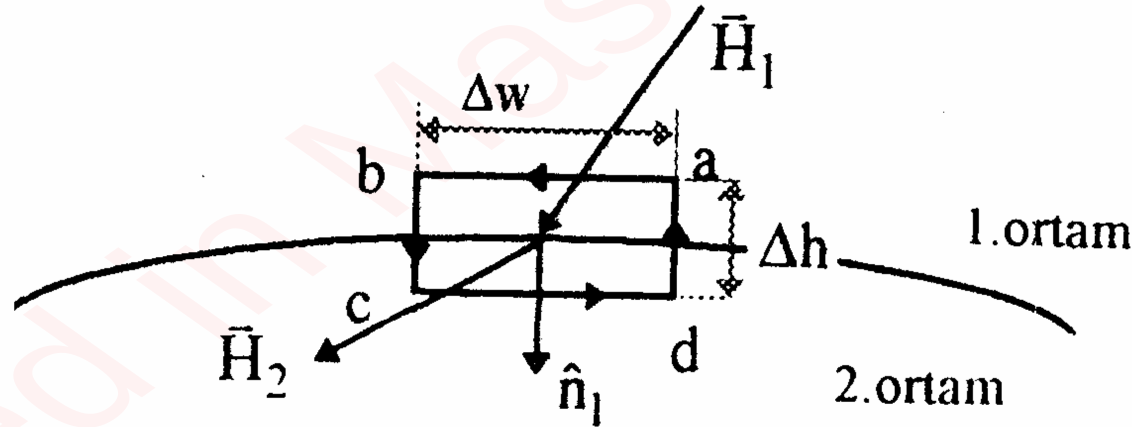
$$H_{1t} - H_{2t} = J_{sn} \quad \text{(A/m)} \qquad (1.98)$$

elde edilir. Burada J_{sn}, sınır yüzeyi üzerinde ve C çevresine dik yüzeysel akım yoğunluğudur. J_{sn}'nin yönü, sağ elin parmakları yol yönünde olduğu zaman, baş parmağın gösterdiği yöndür. Şekil.1.17'de, seçilen yol için, J_{sn}'nin pozitif yönü

sayfanın dışına doğrudur (yani bize doğru). Aşağıda, $\vec{H}$'nin teğetsel bileşenlerine ait sınır şartı, hem büyüklük hem de yön bilgisini içerecek şekilde daha öz bir biçimde verilmiştir:

$$\hat{n}_2 \times (\vec{H}_1 - \vec{H}_2) = \vec{J}_s \text{ (A/m)} \quad (1.99)$$

Burada $\hat{n}_2$, sınır yüzeyinde **2.ortamdan dışa doğru yönelmiş birim normal vektördür.** Böylece, **H alanının teğet bileşeni, yüzey akımının bulunduğu bir sınır yüzeyini geçerken süreksizdir**; süreksizlik miktarı Denk.(1.99) ile belirlenir.



Şekil.1.17: H_t'ye ait sınır şartını belirlemek için kullanılan iki ortamın arayüzeyindeki kapalı yol

Her iki ortamın iletkenlikleri sonlu olduğu zaman, akımlar hacimsel akım yoğunlukları tarafından belirlenir ve sınır yüzeyi üzerinde serbest yüzey akımları bulunmaz. Böylece, J_s sıfıra eşit olur ve **$\vec{H}$'nin teğet bileşeni, hemen hemen bütün fiziksel ortamların sınırını geçerken sürekli olur**; **sadece, ideal iletken veya bir süper iletken ile olan sınır yüzeyinde süreksizdir**.

****

Örnek.1.11: μ_1 ve μ_2 permiabiliteli iki manyetik ortam, Şekil.1.18'de gösterildiği gibi ortak bir sınıra sahiptir. 1. ortamda P_1 noktasındaki manyetik alan şiddetinin büyüklüğü H_1'dir ve normalle α_1 açısını yapmaktadır. 2. ortamdaki P_2 noktasında manyetik alan şiddetinin büyüklük ve yönünü bulunuz.

Çözüm: İstenen bilinmeyen nicelikler H_2 ve α_2 dir. $\vec{B}$ alanının normal bileşeninin sürekliliği, Denk(1.96) ile verilen $\mu_1 H_{1n} = \mu_2 H_{2n}$ şartından,

$$\mu_2 H_2 \cos\alpha_2 = \mu_1 H_1 \cos\alpha_1 \qquad (1.100)$$

yazılır. Ortamların hiçbiri de ideal iletken olmadığından, $\vec{H}$'nin teğetsel bileşeni sürekli olur ve

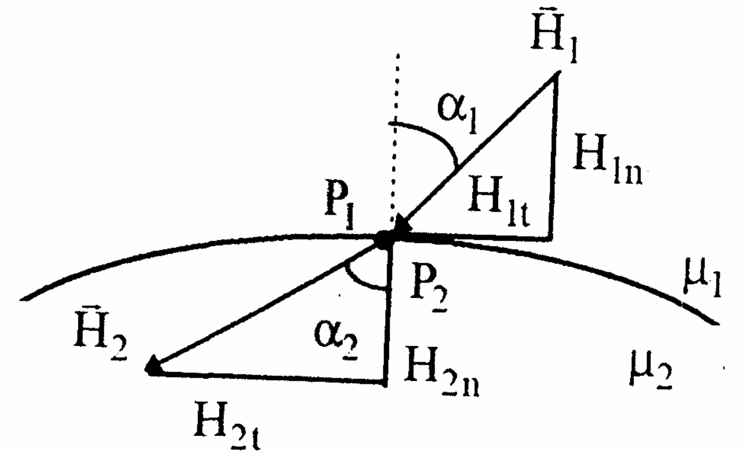
$$H_2 \sin\alpha_2 = H_1 \sin\alpha_1 \quad (1.101)$$

elde edilir. Denk.(1.101)'in Denk.(1.100)'e bölünmesi ile,

$$\frac{\tan\alpha_2}{\tan\alpha_1} = \frac{\mu_2}{\mu_1} \quad (1.102)$$

veya

$$\alpha_2 = \tan^{-1}\left(\frac{\mu_2}{\mu_1}\tan\alpha_1\right) \quad (1.103)$$



Şekil.1.18: Bir arayüzeyde manyetostatik için alan sınır şartları

H_2'nin genliği ise,

$$H_2 = \sqrt{H_{2t}^2 + H_{2n}^2} = \sqrt{(H_2 \sin\alpha_2)^2 + (H_2 \cos\alpha_2)^2}$$
$$= H_1 \left[\sin^2\alpha_1 + \left(\frac{\mu_1}{\mu_2} \cos\alpha_1 \right)^2 \right]^{1/2} \qquad (1.104)$$

Şeklinde elde edilir. Bu da **manyetik alanın kırılma özelliğini gösterir**. Burada üç noktayı belirtmeliyiz. **Birincisi,** Denk.(1.102) ve (1.104), permitivite yerine permiabilitenin kullanılması haricinde, dielektrik ortamlarda **elektrik alanlar için elde edilen denklemlere tamamen benzer.** **İkincisi,** eğer 1. ortam hava gibi manyetik olmayan bir ortam ve 2. ortam demir gibi ferromanyetik bir ortam ise, bu durumda $\mu_2 >> \mu_1$ olur ve Denk.(1.102)'den α_2 yaklaşık olarak 90 derece bulunur. Bu, sıfıra yakın olmayan keyfi, bir α_1 açısı için, ferromanyetik bir ortamdaki manyetik alanın arayüzeye hemen hemen paralel olması demektir. **Üçüncüsü**, eğer 1. ortam ferromanyetik ve 2. ortam hava ise ($\mu_1 >> \mu_2$), bu durumda α_2 yaklaşık

olarak sıfır olacaktır; yani, eğer ferromanyetik bir ortamda bir manyetik alan oluşursa, bu alanın akı çizgileri hemen hemen sınır yüzeyinde normal bir yönde hava ortamına girecektir.

****

Akım bulunmayan bölgelerde, $\vec{B}$ manyetik akı yoğunluğu irrotasyoneldir ve Bölüm.1.5.1'de gösterildiği gibi, skaler bir V_m manyetik potansiyelinin gradyenti olarak ifade edilebilir:

$$\vec{B} = -\mu \nabla V_m \qquad (1.105)$$

Sabit bir μ kabul edilerek, Denk.(1.105)'in $\nabla . \vec{B} = 0$ da yerine konması, V_m cinsinden bir Laplace denklemi verir:

$$\nabla^2 V_m = 0 \qquad (1.106)$$

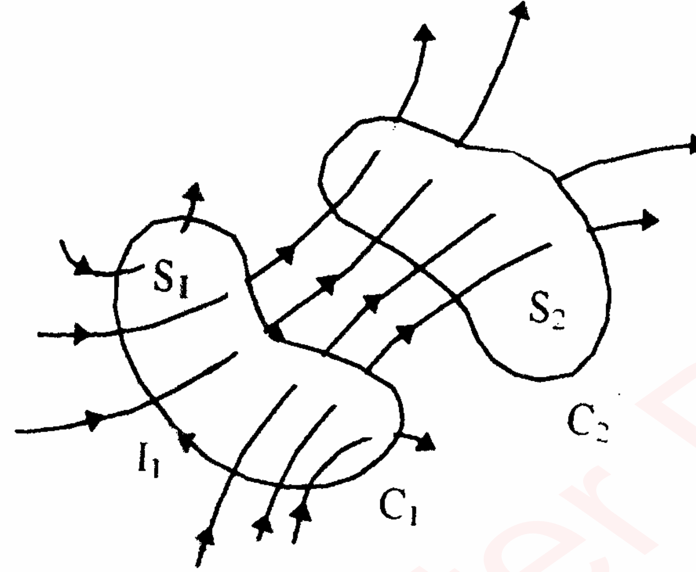
Denk.(1.106), yüksüz bir bölgedeki V_m skaler elektrik potansiyeli için elde edilen Laplace denklemine tamamen benzer. Denk.(1.106)'nın, verilen sınır şartlarını sağlayan çözümünün tekliği, elektrik potansiyeline benzer bir şekilde ispatlanabilir.

1.11. İNDÜKTANSLAR VE İNDÜKTÖRLER

Şekil.1.19'da gösterildiği gibi sırasıyla S_1 ve S_2 yüzeylerini sınırlayan C_1 ve C_2 gibi komşu iki kapalı ilmeği göz önüne alalım. Eğer C_1'de bir I_1 akımı akarsa, bir B_1 manyetik alanı meydana gelecektir. B_1'den dolayı oluşan manyetik akının bir kısmı C_2'yi kuşatacaktır; yani, C_2 ile sınırlanmış S_2 yüzeyinden geçecektir. Bu ortak akıyı Φ_{12} ile gösterelim. Bu durumda,

$$\Phi_{12} = \int_{S_2} \vec{B}_1 \cdot d\vec{s}_2 \quad \text{(Wb)} \qquad (1.107)$$

yazılabilir. Fizikten bilindiği gibi, **zamanla değişen bir I_1 akımı (ve bu yüzden zamanla değişen bir Φ_{12} akısı), Faraday elektromanyetik kanununun bir sonucu olarak, C_2 de indüklenmiş bir emk veya voltaj üretecektir** (Faraday kanunu gelecek bölümde incelenecektir). Bununla birlikte, **I_1 kararlı bir DC akım olsa bile Φ_{12} mevcut olur**.



Şekil.1.19: Manyetik olarak etkileşimli iki ilmek

$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint_{C'} \frac{d\vec{l}' \times \hat{R}}{R^2}$ şeklindeki Biot-Savart kanunundan, B_1'in I_1 ile doğru orantılı olduğu görülür. Böylece, Φ_{12} de I_1 ile orantılı olur. Bu durumda,

$$\Phi_{12} = L_{12} I_1 \qquad (1.108)$$

yazılabilir. Buradaki orantı sabiti **L_{12}, C_1 ve C_2 ilmekleri arasındaki karşılıklı (veya ortak) indüktans** olarak adlandırılır ve birimi SI sisteminde Henry (H)'dir. C_2 nin N_2 sarımlı olduğu durumda, Φ_{12}'den dolayı Λ_{12} toplam akısı,

$$\Lambda_{12} = N_2\Phi_{12} \quad \text{(Wb)} \qquad (1.109)$$

olur. Denk.(1.108) genelleştirilerek,

$$\Lambda_{12} = L_{12}I_1 \quad \text{(Wb)} \qquad (1.110)$$

veya

$$L_{12} = \frac{\Lambda_{12}}{I_1} \qquad (1.111)$$

şeklinde yazılır. Bu durumda, iki devre arasındaki ortak indüktans, bir devredeki birim akım başına diğer devredeki toplam manyetik akı miktarıdır. Denk.(1.108)'de, ortamın permiabilitesinin I ile değişmediği ima edilmiştir. Başka bir deyişle, Denk.(1.108) ve bu yüzden **Denk.(1.111) sadece lineer ortamlar için kullanılır**. L_{12} için daha genel bir tanımlama,

$$L_{12} = \frac{d\Lambda_{12}}{dI_1} \quad \text{(H)} \tag{1.112}$$

şeklinde verilir.

I_1 tarafından oluşturulan manyetik akının bir kısmı, sadece C_1'in kendisini kuşatır, fakat C'yi kuşatmaz. Bundan dolayı, I_1 tarafından oluşturulan C_1'in toplam akısı,

$$\Lambda_{11} = N_1\Phi_{11} > N_1\Phi_{12} \tag{1.113}$$

olur. **C_1 ilmeğinin self (öz) indüktansı, ilmeğin kendisindeki birim akım başına manyetik akı halkalaması olarak tanımlanır**; yani, lineer bir ortam için,

$$L_{11} = \frac{\Lambda_{11}}{I_1} \quad \text{(H)} \tag{1.114}$$

dir. Genel anlamda,

$$L_{11} = \frac{d\Lambda_{11}}{dI_1} \quad \text{(H)} \tag{1.115}$$

dir. Bir ilmeğin veya devrenin **öz indüktansı, ortamın permiabilitesine olduğu kadar, ilmeği veya devreyi oluşturan iletkenin geometrik şekline ve fiziksel düzenlemesine de bağlıdır. Lineer bir ortam için, öz indüktans ilmek veya devredeki akıma bağlı değildir**. Aslında, ilmeğin veya devrenin açık veya kapalı olmasına veya diğer bir ilmek veya devrenin yakınında olup olmamasına bakılmaksızın, öz indüktans vardır.

Belli bir **öz indüktans sağlamak için uygun bir şekilde düzenlenen bir iletken** (bobin şeklinde sarılan iletken bir tel gibi), **indüktör olarak adlandırılır**. Bir kapasitörün elektrik enerjisi depolayabilmesi gibi, bir indüktörün de manyetik enerji depolayabileceğini gelecek bölümde verilecektir. Sadece bir ilmek veya bobinle ilgilendiğimiz zaman, Denk.(1.114) veya (1.115)'deki alt indisleri kullanmaya gerek kalmaz ve bir sıfat kullanmadan indüktans deyince öz indüktans akla gelecektir.

Bir indüktörün öz indüktansını belirleme işlemi şu şekilde yapılır:

1. Verilen geometriye uygun bir koordinat sistemi seçilir.

2. İletken telde bir I akımı kabul edilir.

3. Eğer simetri varsa, $\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I$ şeklindeki Amper devre kanunu kullanılarak I dan $\vec{B}$ bulunur. Eğer simetri yoksa, $\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint_{C'} \frac{d\vec{l}\,' \times \hat{R}}{R^2}$ şeklindeki Biot-Savart kanunu kullanılmalıdır.

4. $\Phi = \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{s}$

integrali alınarak $\vec{B}$'den, her sarımı halkalayan Φ akısı bulunur. Burada S, $\vec{B}$'nin mevcut olduğu ve akımın kuşattığı alandır.

5. Φ akısı sarım sayısı ile çarpılarak Λ bulunur.

6. $L = \Lambda / I$ oranından L elde edilir.

İki devre arasındaki ortak indüktansı tayin etmek için, bu işlemlerde sadece küçük bir değişiklik yapmak gerekir. Uygun bir koordinat sisteminin seçiminden sonra şunlar yapılır: I_1 kabul edilir; $\vec{B}_1$ bulunur; B_1, S_2 yüzeyi üzerinden, integre edilerek

Φ_{12} elde edilir. Daha sonra, $\Lambda_{12} = N_2\Phi_{12}$'den akı halkalaması ve ondan da $L_{12} = \Lambda_{12} / I_1$ hesaplanır.

****

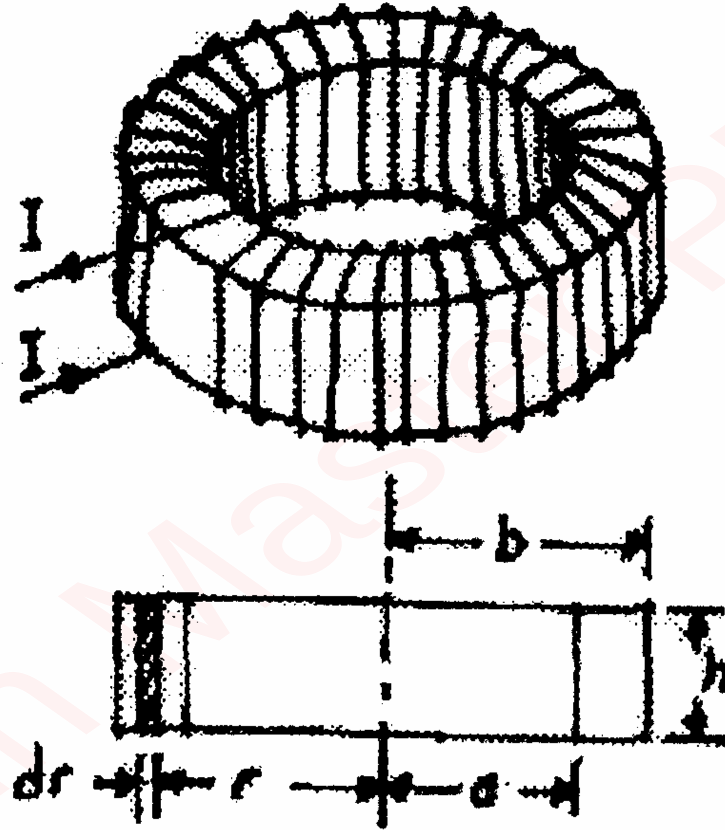
Örnek.1.12: Şekil.1.20'de gösterilen boyutlara sahip, dikdörtgen kesitli, toroid biçimli bir çerçeve üzerine N sarım sıkı bir şekilde sarılmıştır. Ortamın permiabilitesini μ_0 alarak, toroid biçimli bobinin öz indüktansını bulunuz.

Çözüm: Bu problem için silindirik koordinat sisteminin uygun olduğu açıktır; çünkü toroid kendi ekseni etrafında simetriktir.

1. Koordinat sistemi silindirik koordinat sistemidir.
2. İletken telde bir I akımı kabul edilmiştir.
3. r (a<r<b) yarıçaplı dairesel bir yola $\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I$ şeklindeki Amper-devre yasası uygulanarak $\vec{B}$ akı yoğunluğu,

$$\vec{B} = \hat{\phi} B_\phi , \quad d\vec{l} = \hat{\phi} r d\phi$$

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \int_0^{2\pi} B_\phi \, r \, d\phi = 2\pi r B_\phi$$



Şekil.1.20: Sıkı sarımlı toroid biçimli bir bobin

şeklinde bulunur. B_ϕ ve r, C dairesel yolu etrafında sabit olduğundan, bu sonuç elde edilmiştir. Yolun kuşattığı toplam akım NI olduğundan,

$$2\pi r B_\phi = \mu_0 N I$$

yazılabilir. Böylece,

$$\hat{B} = \hat{\phi}\frac{\mu_0 N I}{2\pi r}$$

bulunur.

4. Sonra,

$$\Phi = \iint_S \vec{B}\cdot d\vec{s} = \iint_S \left(\hat{\phi}\frac{\mu_0 N I}{2\pi r}\right)\cdot\left(\hat{\phi}\, h\, dr\right) = \frac{\mu_0 N I h}{2\pi}\int_a^b \frac{dr}{r} = \frac{\mu_0 N I h}{2\pi}\ln(b/a)$$

elde edilir.

5. Toplam Akı $\Lambda = N\Phi$ den,

$$\Lambda = \frac{\mu_0 N^2 I h}{2\pi}\ln(b/a)$$

olur.

6. Sonuç olarak,

$$L = \frac{\Lambda}{I} = \frac{\mu_0 N^2 h}{2\pi}\ln(b/a) \quad \text{(H)} \qquad (1.116)$$

elde edilir.

Öz indüktansın, sabit bir ortam permiabilitesi için, I'nın fonksiyonu olmadığına dikkat ediniz. Bobinin, toroid üzerine sıkı sarılmasının amacı, her bir sarımın etrafındaki kaçak akının minimuma indirilmesi içindir.

****

Örnek.1.13: Birim uzunluk başına n sarıma sahip, hava çekirdekli çok uzun bir solenoidin birim uzunluk başına indüktansını bulunuz.

Çözüm: Sonsuz uzun bir solenoidin içindeki manyetik akı yoğunluğu Örnek.1.3'de bulunmuştu. I akımı için, Denk.(1.13)'de,

$$B = \mu_0 n I$$

elde edilmişti. Bu akı, solenoid içinde sabit olduğundan,

$$\Phi = BA = \mu_0 nSI \qquad (1.117)$$

yazılır. Burada S, solenoidin kesit alanıdır. Birim uzunluk başına toplam akı ise,

$$\Lambda' = n\Phi = \mu_0 n^2 SI \qquad (1.118)$$

olur. Böylece, birim uzunluk başına indüktans,

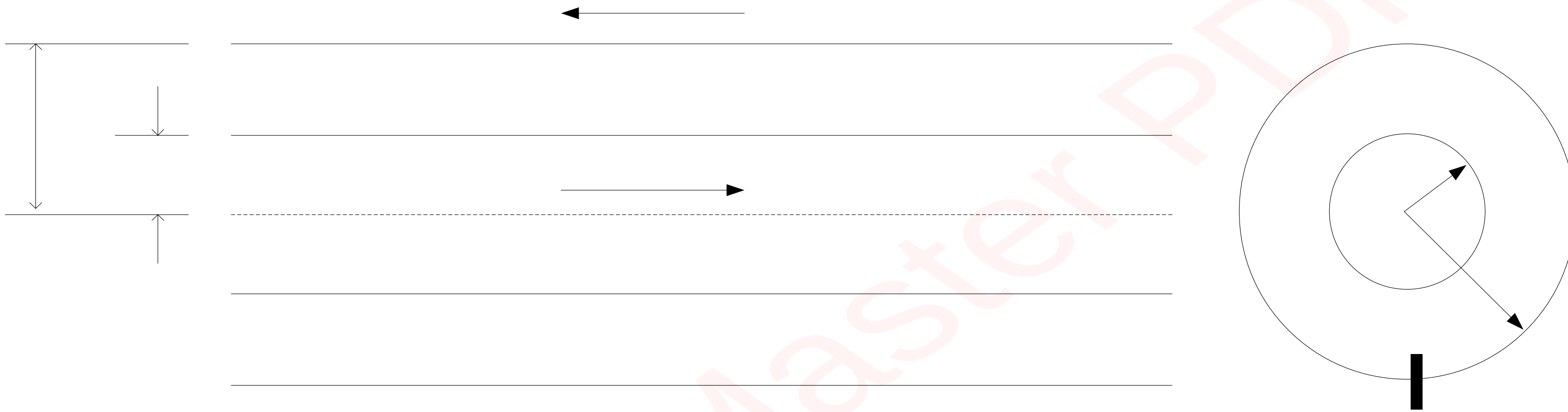
$$L' = \mu_0 n^2 S \quad \text{(H/m)} \qquad (1.119)$$

şeklinde bulunur. Denk.(1.119), solenoidin uzunluğunun, kesit alanının lineer boyutlarından çok daha büyük olduğu kabul edilerek elde edilen yaklaşık bir formüldür. Gerçekte, Denk.(l.119)'daki L′ değerinin uzunlukla çarpılmasından elde edilecek olan, sonlu uzunluktaki bir solenoidin toplam indüktansı, gerçek değerinden biraz az olacaktır.

Önceki iki örneğin sonuçlarına bakılarak şu sonuca varılabilir: **Tel sarımlı indüktörlerin öz indüktansı, sarım sayısının karesi ile orantılıdır**.

****

Örnek.1.14: Hava ortamlı bir koaksiyel (ortak eksenli) iletim hattı, a yarıçaplı katı bir iç iletkene ve iç yarıçapı b olan çok ince bir dış iletkene sahiptir. Hattın birim uzunluk başına indüktansını bulunuz.



Şekil.1.21: Ortak eksenli iletim hattının iki görünüşü

Çözüm: Şekil.1.21'deki gibi, bir I akımının iç iletkenden aktığını ve dıştaki iletkenden zıt yönde döndüğünü kabul edelim. Silindirik simetriden dolayı, $\vec{B}$'nin sadece ϕ bileşeni olur ve bu bileşen de iki bölgede farklı biçimlere sahip olur. Bu bölgeler:

(a) İç iletkenin içi,

(b) İç ve dış iletkenlerin arasıdır.

Ayrıca, I akımının iç iletkenin kesiti üzerinde düzgün olarak dağıldığını kabul edelim.

(a) İç iletkenin içinde: $0 \le r \le a$ Denk(1.10)'dan,

$$\vec{B}_1 = \hat{\phi} B_{\phi 1} = \hat{\phi}\frac{\mu_0 r I}{2\pi a^2} \tag{1.120}$$

yazılır.

(b) İç ve dış iletkenler arasında: $a \le r \le b$ Denk(1.11)'den,

$$\vec{B}_2 = \hat{\phi} B_{\phi 2} = \hat{\phi}\frac{\mu_0 I}{2\pi r} \tag{1.121}$$

elde edilir. Şimdi, iç iletkenin içinde r ve r+dr yarıçapları arasında, dairesel bir yüzük biçimli alanı göz önüne alalım. Bu dairesel halkanın birim uzunluğundaki akımı halkalayan akı (iki iletkenin arasındaki akı ile iç iletkende r ile a arasındaki akının toplamıdır), Denk(1.120) ve (1.121) integre edilerek,

$$d\Phi' = \int_r^a B_{\phi_1} dr + \int_a^b B_{\phi_2} dr = \frac{\mu_0 I}{2\pi a^2}\int_r^a r\,dr + \frac{\mu_0 I}{2\pi}\int_a^b \frac{dr}{r}$$

$$= \frac{\mu_0 I}{4\pi a^2}(a^2 - r^2) + \frac{\mu_0 I}{2\pi}\ln(b/a) \qquad (1.122)$$

şeklinde elde edilebilir. Ancak, dairesel yüzük içindeki akim, toplam I akımının sadece ($2\pi r dr / \pi a^2 = 2rdr / a^2$) kadarlık bir kısmıdır.

NOT: Akımın iç iletken içinde düzgün dağıldığı kabul edilmiştir. Bu kabul yüksek frekanslı AC akımlar için geçerli değildir.

Böylece bu dairesel halka için akı halkalaması,

$$d\Lambda' = \frac{2rdr}{a^2} d\Phi' \qquad (1.123)$$

olur. Birim uzunluk başına toplam akı,

$$\Lambda' = \int_{r=0}^{r=a} d\Lambda' = \frac{\mu_0 I}{\pi a^2}\left[\frac{1}{2a^2}\int_0^a (a^2 - r^2) r dr + \left(\ln\frac{b}{a}\right)\int_0^a r dr\right]$$
$$= \frac{\mu_0 I}{2\pi}\left(\frac{1}{4} + \ln\frac{b}{a}\right)$$

şeklinde bulunur. Böylece, koaksiyal iletim hattının birim uzunluğunun indüktansı,

$$L' = \frac{\Lambda'}{I} = \frac{\mu_0}{8\pi} + \frac{\mu_0}{2\pi}\ln(b/a) \quad \text{(H/m)} \qquad (1.124)$$

olur. İlk terim ($\mu_0 / 8\pi$), katı iç iletkenin dahili akısından doğar ve iç iletkenin **dahili indüktansı** olarak bilinir. İkinci terim, iç ve dış iletkenler arasında mevcut olan akısından meydana gelir ve koaksiyal hattın birim uzunluk başına **harici indüktansı** olarak bilinir.

****

İki devre arasındaki ortak indüktansın nasıl belirleneceğine ait örneklere geçmeden önce, Şekil.1.19 ve Denk(1.111) $L_{12} = \Lambda_{12}/I_1$ hakkında aşağıdaki soru üzerinde

düşünelim. C_1 ilmeğindeki birim akım tarafından oluşturulan ve C_2 ilmeğini kuşatan akı, C_2'deki birim akım tarafından oluşturulan ve C_1'i halkalayan akıya eşit midir? Yani,

$$L_{12} = L_{21} \ ? \qquad (1.125)$$

eşitliği doğru mudur? Cevabın, karşılıklı ilişkiden dolayı "evet" olmasını bekleyebiliriz. Ancak, bunun ispatlanması gerekir. Bunun için aşağıdaki gibi bir yol izlenebilir. $\Phi_{12} = \iint_{S_2} \vec{B}_1 . d\vec{s}_2$, $\Lambda_{12} = N_2 \Phi_{12}$ ve $L_{12} = \Lambda_{12} / I_1$ birleştirilerek,

$$L_{12} = \frac{N_2}{I_1} \iint_{S_2} \vec{B}_1 . d\vec{s}_2 \qquad (1.126)$$

elde edilir. Fakat $\vec{B}_1$ akı yoğunluğu, $\vec{A}_1$ gibi bir manyetik vektör potansiyelin rotasyoneli olarak yazılabilir ($B = \nabla \times \vec{A}$). Böylece

$$L_{12} = \frac{N_2}{I_1} \iint_{S_2} (\nabla \times \vec{A}_1) \cdot d\vec{s}_2 = \frac{N_2}{I_1} \int_{C_2} \vec{A}_1 \cdot d\vec{l}_2 \qquad (1.127)$$

olur. Şimdi, $\vec{A}=\frac{\mu_0 I}{4\pi}\oint_{C'}\frac{d\vec{l}'}{R}$ denkleminden,

$$\vec{A}_1=\frac{\mu_0 N_1 I_1}{4\pi}\oint_{C_1}\frac{d\vec{l}_1}{R} \tag{1.128}$$

ifadesi yazılabilir. Denk.(1.127) ve (1.128)'de, kapalı yol integralleri sırasıyla, C_2 ve C_1 ilmeklerinin çevresi üzerinde sadece bir kez alınır (çoklu sarımların etkileri N_2 ve N_1 çarpanları ile temsil edilir). Denk.(1.128)'in Denk(1.127)'de kullanılması halinde,

$$L_{12}=\frac{\mu_0 N_1 N_2}{4\pi}\oint_{C_1}\oint_{C_2}\frac{d\vec{l}_1\cdot d\vec{l}_2}{R} \tag{1.129a}$$

elde edilir. Burada R, $d\vec{l}_1$ ve $d\vec{l}_2$ diferansiyel uzunlukları arasındaki mesafedir. Bunu,

$$L_{12}=\frac{\mu_0}{4\pi}\oint_{C_1}\oint_{C_2}\frac{d\vec{l}_1\cdot d\vec{l}_2}{R} \quad \text{(H)} \tag{1.129b}$$

şeklinde yazmak alışkanlık olmuştur. Burada, N_1 ve N_2'ler, C_1 ve C_2 devreleri üzerinden bir uçtan diğer uca alınan kapalı yol integrallerinin içine alınmıştır.

Denk.(1.129b), **ortak indüktans için Neumann formülüdür**. Bu ifade, iki katlı bir çizgi integral hesabını gerektiren genel bir formüldür. Verilen herhangi bir problem için, daima ilk önce Denk(1.129b)'ye başvurmadan, akı halkalamasının ve ortak indüktansın daha kolay hesaplanabileceği simetri şartları aranır.

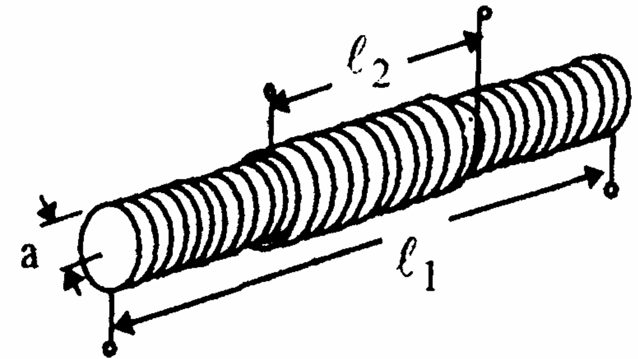
Denk.(1.129b)'den, ortak indüktansın, geometrik şeklin ve etkileşimli devrelerin fiziksel düzenlemesinin bir özelliği olduğunu açıkça görmekteyiz. Lineer bir ortam için, ortak indüktans ortamın permiabilitesi ile orantılıdır ve devrelerdeki akımlardan bağımsızdır. 1 ve 2 indislerinin yer değiştirmesinin, iki kat integralin değerini değiştirmeyeceği açıktır; böylece, Denk.(1.125)'de sorulan sorunun cevabı olumlu olur. Bu önemli bir sonuçtur; çünkü bu, ortak indüktansı belirlemek için kullanılabilecek iki yoldan (L_{12} veya L_{21}'in bulunması) en basitini kullanma imkanı verir.

NOT: Devre teorisi kitaplarında, ortak indüktansı göstermek için sıkça kullanılan bir sembol de M'dir.

****

Örnek.1.15: a yarıçaplı, metalik olmayan, düz ve silindirik bir çekirdek üzerine, ortak eksenli ve ortak merkezli olarak, N_1 ve N_2 sarımla, iki bobin sarılmıştır (her iki solenoidin yarıçapı da yaklaşık olarak aynıdır). Sarımların uzunluğu, sırasıyla l_1 ve l_2'dir. Bobinler arasındaki ortak indüktansı bulunuz.

Çözüm: Şekil.1.22'de, ortak merkezli (konsentrik) iki sarıma sahip böyle bir solenoid gösterilmiştir. İçteki bobinden I_1 akımının geçtiğini kabul edelim. Denk(1.117) $\Phi = \mu_0 nSI$ den, solenoid çekirdekte oluşan ve dıştaki bobini halkalayan Φ_{12} akısı,



Şekil.1.22: İki sarımlı bir selenoid

$$\Phi_{12} = \mu_0 \left(\frac{N_1}{l_1} \right) (\pi a^2) I_1$$

olur. Dıştaki bobin N_2 sarımlı olduğundan,

$$\Lambda_{12} = N_2 \Phi_{12} = \frac{\mu_0}{l_1} N_1 N_2 \pi a^2 I_1$$

elde edilir. Buradan, ortak indüktans için,

$$L_{12} = \frac{\Lambda_{12}}{I_1} = \frac{\mu_0}{l_1} N_1 N_2 \pi a^2 \qquad (1.130)$$

elde edilir.

****

Örnek.1.16: Şekil.1.23'deki gibi, üçgen şeklindeki iletken bir ilmekle, çok uzun düz bir iletken arasındaki ortak indüktansı tayin ediniz.

Çözüm: Üçgen ilmeği 1. devre ve uzun teli 2. devre olarak alalım. Eğer üçgen ilmekte bir I_1 akımı kabul edersek, $\vec{B}_1$ manyetik akı yoğunluğunu her yerde bulmak

zor olur. Bu yüzden de, Λ_{12}/I_1 den L_{12} ortak indüktansını bulmak güçleşir. Bununla beraber, uzun düz bir teldeki bir I_2 akımı tarafından oluşturulan $\vec{B}_2$ için, Amper devre kanunu uygulanarak,

$$\vec{B}_2 = \hat{\phi}\,\frac{\mu_0 I_2}{2\pi r}$$

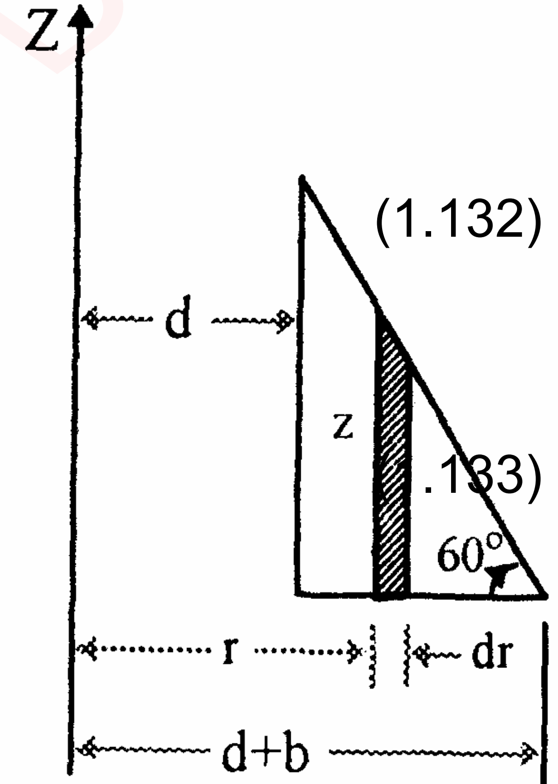
elde edilir. Akı halkalaması, $\Lambda_{21} = \Phi_{12}$'den,

$$\Lambda_{21} = \iint_{S_1} \vec{B}_2 \cdot d\vec{s}_1 \qquad (1.132)$$

olur. Burada,

$$d\vec{s}_1 = \hat{\phi}\, z\, dr \qquad (1.133)$$

dür. z ile r arasındaki bağıntı, üçgenin hipotenüs denkleminden,



Şekil.1.23: İletken bir üçgen ilmek ve uzun düz bir tel

$$z = -[r-(d+b)]\tan 60° = -\sqrt{3}[r-(d+b)] \tag{1.134}$$

şeklinde yazılır. Denk.(1.131), (1.133) ve (1.132) ile verilen ifadeler Denk.(1.134)'de kullanılarak,

$$\Lambda_{21} = -\frac{\sqrt{3}\mu_0 I_2}{2\pi}\int_{d}^{d+b}\frac{1}{r}[r-(d+b)]dr = \frac{\sqrt{3}\mu_0 I_2}{2\pi}\left[(d+b)\ln\left(1+\frac{b}{d}\right)-b\right]$$

elde edilir. Böylece ortak indüktans,

$$L_{21} = \frac{\Lambda_{21}}{I_2} = \frac{\sqrt{3}\mu_0}{2\pi}\left[(d+b)\ln\left(1+\frac{b}{d}\right)-b\right] \text{ (H)} \tag{1.135}$$

olur.

****